MAT–319 LISTA 9 Prof. Eduardo

Para ser entregue até o dia 06.08.08:

1. (i) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto limitado por uma superfície suave fechada S orientada pelo campo normal unitário exterior $\vec{n}$. Sejam $u, v \in C^2(\overline{U}) \cap C^1(\overline{U})$. Prove a 1ª Identidade de Green

$$\iiint_V u\Delta v \, dxdydz = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \, d\sigma \; .$$

(ii) Dada $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, use (i) para provar a unicidade de solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D \\ u = g & \text{em } S \end{cases}$$

(iii) Prove que $\displaystyle\iiint_V \Delta v \, dxdydz = \iint_S \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$. **Sugestão:** Faça $u = 1$ em (i).

(iv) Dada $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, considere o problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{em } S \end{cases}$$

Prove que para que o Problema de Neumann tenha solução é necessário que $\displaystyle\iint_S h \, d\sigma = 0$.

Prove que duas soluções quaisquer do Problema de Neumann diferem por uma constante.

2. Prove a 2ª Identidade de Green

$$\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u) dxdydz = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \; .$$

Sugestão: Use 1 (i) e a identidade obtida trocando os papéis de u e v.

3. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto limitado por uma curva suave, fechada, simples γ. Sejam $u, v \in C^1(\overline{D}) \cap C(\overline{D})$. Prove as fórmulas de integração por partes

$$\iint_D uv_x \, dxdy = \int_\gamma uv \, dy - \iint_D u_x v \, dxdy \, ,$$

$$\iint_D uv_y \, dxdy = \int_\gamma -uv \, dy - \iint_D u_y v \, dxdy \, .$$

4. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto limitado por uma curva suave, fechada, simples γ. Sejam $u, v \in C^2(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D})$. Prove que

$$2 \iint_D \Big(uv_{xy} - vu_{xy} \Big) dxdy = \int_\gamma (uv_y - vu_y) dy - (uv_x - vu_x) dx \; .$$

Definição. Analogamente à integral de superfície do 1º tipo, define-se também integral de linha do 1º tipo (em relação ao comprimento de arco). Se γ é uma curva suave, parametrizada por $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, para $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$, escolhendo-se pontos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, considera-se a soma $\sum(f, \mathcal{P}) = \sum_i f(\varphi(\xi_i))s_i$, onde s_i é o comprimento do arco $\{\varphi(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$. A integral de linha do 1º tipo $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$ é definida como sendo o limite das somas $\sum(f, \mathcal{P})$ quando a norma da partição $\|\mathcal{P}\| \longrightarrow 0$. Como $s_i = \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(t)\|\,dt$, mostra-se que

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(t)\|\varphi'(t)\|\,dt\ .$$

Note que a integral de linha do 1º tipo não depende da orientação da curva. Se $f(t)$ for a densidade de massa (massa por unidade de comprimento) ao longo de uma curva, ou analogamente a densidade de carga, a integral $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$ representa a massa, ou a carga, total da curva.

5. Mostre que se $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma curva suave na qual foi fixada uma orientação, se $\vec{t}$ é o campo tangente unitário sobre a curva compatível com a orientação e se $\vec{F} = \big(L, M, N\big)$ é um campo de vetores definido num aberto contendo γ, então

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{t}\,ds = \int_\gamma L\,dx + M\,dy + N\,dz\ .$$

6. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a região limitada pela curva suave fechada simples γ. Sejam $a \in D$ e U aberto contendo $\overline{D}$. Sejam L e M funções de classe C^1 definidas no aberto $U \setminus \{a\}$ e satisfazendo $L_y = M_x$. Suponhamos que $B[a;\delta] \subseteq D$ e seja γ_δ a circunferência de raio δ centrada em a. Prove que

$$\int_\gamma L\,dx + M\,dy = \int_{\gamma_\delta} L\,dx + M\,dy$$

7. Seja γ uma curva fechada simples em $\mathbb{R}^2$ que não passa pela origem e orientada no sentido anti-horário. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a região limitada pela curva γ. Denotemos por $\vec{r} = (x, y)$ e $r = \|\vec{r}\|$. Seja $\vec{n}$ o campo normal exterior unitário a γ. Prove que

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\,ds = \begin{cases} 0, & \text{se } (0,0) \in D \\ 1, & \text{se } (0,0) \notin D \end{cases}$$

Sugestão: Se $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de γ, então $\vec{t} = \dfrac{\big(x'(t), y'(t)\big)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{\frac{1}{2}}}$ e, portanto, $\vec{n} = \dfrac{\big(-y'(t), x'(t)\big)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{\frac{1}{2}}}$. Deduza daí que

$$\int_\gamma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\,ds = \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\ .$$

8. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto e $f \in C^2(U)$. Para $a \in U$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, sejam $B(a;\delta)$ a bola de raio δ centrada em a e $\big|B(a;\delta)\big| = \dfrac{4\pi\delta^3}{3}$ o seu volume.

Seja $S(a;\delta) = \{x \mid |x-a| = \delta\}$. Prove que

$$\Delta f(a) = \lim_{\delta \longrightarrow 0^+} \frac{1}{|B(a;\delta)|} \iint\limits_{S(a;\delta)} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma \ .$$

Sugestão: Use as identidades do exercício 1 e o Teorema do Valor Médio para integrais.

9. Seja S uma superfície com a propriedade que cada semi-reta a partir da origem corta S no máximo uma vez. Seja $\Omega(S)$ a união de todas as semi-retas partindo da origem que intersecionam S. Dizemos que $\Omega(S)$ é o ângulo sólido subentendido por S. Para $a > 0$, seja $\sum(a)$ a interseção de $\Omega(S)$ com a bola $B(0;a)$. O quociente

$$\frac{\text{area}\big(\sum(a)\big)}{a^2}$$

não depende de a, é denotado por $\big|\Omega(S)\big|$ e é usado para medir o ângulo sólido $\Omega(S)$. Prove que

$$\big|\Omega(S)\big| = \iint\limits_{S} \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}\, d\sigma \ ,$$

onde $\vec{r} = (x,y,z),\ r = \|\vec{r}\|$ e $\vec{n}$ é o vetor normal unitário a S dirigido no sentido oposto à origem.
Sugestão: Aplique o Teorema da Divergência na região $\sum(a) \setminus B(0;\varepsilon)$.