MAT–319 LISTA 8 Prof. Eduardo

Para ser entregue até o dia 30.09.02:

1. Para $a > 0$, seja $B_n(a)$ o volume da região

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \le a\} \, .$$

(i) Justifique que $B_n(a) = a^n B_n(1)$.

(ii) Prove que $B_n(1) = \dfrac{2}{n} B_{n-1}(1)$. **Sugestão:**

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \le 1 \iff |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| \le 1 - |x_n| \quad \text{e} \quad |x_n| \le 1 \, .$$

$$B_n(1) = \int_{-1}^{1} \Bigg(\underset{|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|\le 1-|x_n|}{\int \cdots \int} dx_1 \cdots dx_{n-1} \Bigg) dx_n$$

(iii) Prove que $B_n(1) = \dfrac{2^n}{n!}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(1) = 0$.

2. Usando uma mudança de variáveis conveniente, calcule o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \, .$$

3. (1.4 do livro, pág. 390)

4. (2.1 do livro)

5. (2.2 do livro) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ caminho contínua retificável (def. na pág. 94). Prove que $f[a, b])$ tem medida 0.

6. O objetivo deste exercício é construir uma curva contínua que preenche um quadrado (e portanto sua imagem não tem medida 0). Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função par, periódica de período 2 tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 \, , & \text{para } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ 3t - 1 \, , & \text{para } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ 1 \, , & \text{para } \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

(i) Faça uma esboço do gráfico de φ.

(ii) Defina $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^2 t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^4 t) + \cdots$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\varphi(3t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^3 t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^5 t) + \cdots$$

Mostre que as séries acima convergem uniformemente, de modo que f e g são contínuas.

(iii) Calcule $f(t)$ e $g(t)$, onde a expansão de t em base 3 é dada por 0.2020 , 0.0220 e 0.0022.

(iv) Dado $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$, considere as expansões em base 2 de x e y

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \ , \qquad y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \ ,$$

onde $\alpha_i\beta_j \in \{0,1\}$. Seja $t \in [0,1]$ cuja expansão em base 3 é dada por

$$t = 0.(2\alpha_1)(2\beta_1)(2\alpha_2)(2\beta_2)(2\alpha_3)(2\beta_3)\ldots$$

Mostre que $f(t) = x$ e $g(t) = y$. Conclua que a imagem da curva contínua $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ é todo o quadrado $[0,1] \times [0,1]$.

7. (3.4 do livro) $A \subseteq \mathbb{R}^m$ um retângulo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável, $f(A) \subseteq [a,b]$ e $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável. **Sugestão:** Use o Critério de Lebesgue.

8. Prove que o gráfico de uma função integrável tem conteúdo 0. Mostre que a recíproca é falsa, dando um exemplo de função não integrável cujo gráfico tem conteúdo 0. **Sugestão:** Considere a função de Dirichlet, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$.

9. Prove que o produto de funções integráveis é integrável. **Sugestão:** Use o Critério de Lebesgue.

10. Seja $I \subseteq \mathbb{R}^m$ um retângulo e seja $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência de funções integráveis, com $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

Prove que f é integrável. **Sugestão:** Use o Critério de Lebesgue.

Prove que $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$.

11. (3.10 do livro) Sejam $A \in \mathbb{R}^m$ retângulo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e $f \geq 0$. Prove que f é integrável se e somente se $C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid x \in A \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ é um subconjunto $J-$mensurável de $\mathbb{R}^{m+1}$. No caso afirmativo mostre que $v\big(C(f)\big) = \int_A f$.

12. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(u,v) = \psi(x,y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$. Note que a imagem inversa, pela ψ, da reta $u = a > 0$ é uma hipérbole, e a imagem inversa, pela ψ, da reta $v = c > 0$ é um círculo. Mostre que ψ não é injetiva, mas sua restrição a $Q = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$ é uma aplicação injetiva, tendo como imagem o conjunto $\{(u,v) \mid v > |u|\}$. Seja φ a inversa da restrição $\psi\big|_Q$. Mostre que se $0 < a < b < c < d$, então φ leva o retângulo $A = [a,b] \times [c,d]$ na região

$$\varphi(A) = \{(x,y) \mid a \leq x^2 - y^2 \leq b \ , \ c \leq x^2 + y^2\} \ .$$

Mostre que se $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\, dxdy = \iint_A f\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{4(v^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}\, dudv \ .$$