Análise 2 LISTA 6 Prof. Eduardo

1. Diagonalize as forma quadráticas, decidindo em cada caso se são positivas, negativas ou indefinidas:

$Q(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

$Q(x, y, z) = 2xy + yz - 3xz.$

$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + xy - xt + 2yt$

2. Sejam $A, B > 0$ e seja f a função definida por $f(x, y) = A\, x^{\frac{1}{3}} + B\, y^{\frac{1}{3}}$.

(i) use o método dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que

$$\max\{f(x, y) \mid x + y = 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\} = \left(A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Mostre que existe um único ponto crítico e que este é um ponto de máximo.

(ii) Use o resultado do item anterior para justificar que

$$A\, u^{\frac{1}{3}} + B\, v^{\frac{1}{3}} \leq \left(A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} (u + v)^{\frac{1}{3}} \ , \qquad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad \text{com} \quad u, v \geq 0 \ .$$

Sugestão: Dados $u, v \geq 0$ não ambos nulos, aplique o anterior para $x = \dfrac{u}{u+v}$ e $y = \dfrac{v}{u+v}$.

3. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e seja $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\det \begin{pmatrix} f_{x_2}(p) & f_{x_3}(p) \\ g_{x_2}(p) & g_{x_3}(p) \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x_1, x_2, x_3) = \big(f(x_1, x_2, x_3), g(x_1, x_2, x_3)\big)$. Prove que $F(p)$ é ponto interior de $F(\mathbb{R}^3)$. **Sugestão:** Considere a aplicação $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $G(x_1, x_2, x_3) = \big(x_1, f(x_1, x_2, x_3), g(x_1, x_2, x_3)\big)$.

4. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $\forall x \in \Omega$, $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é sobrejetiva. Prove que a imagem $f(\Omega)$ de f é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

5. Suponhamos que

$$a\, x^2 + b\, y^2 + c\, z^2 + 2\, d\, x\, y + 2\, e\, x\, z + 2\, f\, y\, z = 1$$

seja a equação de um elipsóide. Seja l o maior dos semi-eixos do elipsóide. Mostre que l é a maior raiz da equação

$$\det \begin{pmatrix} a - \frac{1}{l^2} & d & e \\ d & b - \frac{1}{l^2} & f \\ e & f & c - \frac{1}{l^2} \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Sugestão: O maximize a distância até a origem sobre os pontos do elipsóide. É mais fácil trabalhar com o quadrado da distância.

6. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) um aberto conexo. Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sem pontos críticos. Prove que a condição necessária e suficiente para que os conjuntos $\mathcal{S}_c = \{x \in \Omega \mid u(x) = c\}$ sejam as curvas (superícies) de nível função harmônica $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é que

$$\frac{\Delta u}{\|\nabla u\|^2} = \text{const. em cada } \mathcal{S}_c \ .$$

7. Prove que a equação

$$x + y + z = \operatorname{sen} xyz$$

pode ser resolvida para $z = z(x,y)$ numa vizinhança de $(0,0,0)$. Obtenha que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz\cos xyz - 1}{1 - xy\cos xyz} \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz\cos xyz - 1}{1 - xy\cos xyz} \ .$$

8. Se $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$ são funções de classe C^1, com $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, prove que localmente z é função de classe C^1, com

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

9. Considere as equações

$$f(x,y,z) = 0 \qquad , \qquad \phi(x,y) = 0$$

para f e ϕ de classe C^1. Se $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, mostre que estas equações definem localmente z como função de x. Mostre que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\phi_x f_y - \phi_y f_x}{\phi_y f_z} \ .$$

10. (i) Dados $a, b, c > 0$, encontre o máximo da função $f(x,y,z) = x^a y^b z^c$ sobre o compacto $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \ , \ x,y,z \geq 0\}$. Mostre que

$$x^a y^b z^c \leq \frac{a^a\, b^b\, c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} \ , \qquad \forall\, (x,y,z) \in K \ .$$

(ii) Use o item anterior para mostrar que

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \ , \qquad \forall\, u, v, w \geq 0 \ .$$

11. (i) Suponhamos $eg - f^2 > 0$. Mostre que o máximo e o mínimo da forma quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ no conjunto dos pontos que satisfazem $ex^2 + 2fxy + gy^2 = 1$ são as raízes da equação do segundo grau

$$(\star) \qquad (eg - f^2)\lambda^2 - \big(ag - 2bf + ec\big)\lambda + \big(ac - b^2\big) = 0 \ .$$

(ii) Com as mesmas hipóteses e notação do item anterior, mostre que o máximo e o mínimo da função

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{ex^2 + 2fxy + gy^2}$$

são as raízes da equação $(\star)$.