Nome: ______________________________ Matrícula: __________

Universidade Federal do Rio Grande do Sul Data: 05/02/2003

2ª Prova de Análise I

1. (*2.7 pontos*) Seja $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função crescente e limitada. Seja

$$S=\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}\,.$$

Prove que $S=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

Solução:

Seja $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função crescente e limitada. Então o conjunto $\mathcal{A}=\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$ é limitado e não vazio. Portanto existe o supremo $S=\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$. Dado um $\varepsilon>0$, $\exists\, s\in\mathcal{A}$ tal que $S-\varepsilon<s\leq S$, isto é, $\exists\, x_1\in(a,b)$ tal que $S-\varepsilon<f(x_1)\leq S$.

Seja $\delta=b-x_1$. Se $x\in(a,b)$ e $b-\delta<x<b$, então $x_1<x<b$. Como f é crescente, temos $f(x_1)\leq f(x)$. Por outro lado, pela definição de supremo, $f(x)\leq S$. Então

$$S-\varepsilon<f(x_1)\leq f(x)\leq S$$

e segue, daí, que $|f(x)-S|<\varepsilon$.

Fica assim provado que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $x\in(a,b)$, $b-\delta<x<b\Longrightarrow |f(x)-S|<\varepsilon$, isto é, $S=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

2. (*2.7 pontos*) Seja $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Prove que a imagem de f

$$\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$$

é um intervalo limitado.

1ª Solução:

Seja $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Supondo, por absurdo, que f não seja limitada, então f não é limitada superiormente ou f não é limitada inferiormente. Basta fazer o caso em que f não é limitada superiormente. O outro caso é análogo. Se f não é limitada superiormente, então, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\exists\, x_n\in(a,b)$ tal que $f(x_n)>n$. Mas (x_n) é uma seqüência em (a,b). Portanto é limitada. Pelo Teorema de Bolzano–Weiestrass, existe uma subseqüência convergente $\left(x_{n_k}\right)$. Como não podemos garantir que o limite pertença ao intervalo aberto, argumentamos que, sendo convergente, $\left(x_{n_k}\right)$ é de Cauchy. Mas uma função uniformemente contínua leva seqüência de Cauchy em seqüência de Cauchy. Portanto $\big(f(x_{n_k})\big)$ é de Cauchy. Segue que $\big(f(x_{n_k})\big)$ é convergente. Mas isto é uma contradição, pois de $f(x_n) > n$, $\forall n$, segue que $f(x_{n_k}) \longrightarrow +\infty$.

2ª Solução:

Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a imagem do intervalo (a,b) pela função contínua f é um intervalo. Vamos mostrar que é limitado. Para $\varepsilon_0 = 1$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|t-s| < \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Escolhendo pontos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, decompomos o intervalo (a,b) em uma união

$$(a,b) = (t_0, t_1] \cup (t_1, t_2] \cup \cdots \cup (t_{n-1}, t_n)$$

de intervalos de comprimento $t_i - t_{i-1} < \delta$. A imagem de cada $(t_{i-1}, t_i]$ é um intervalo de comprimento menor ou igual a 1. De fato, $s,t \in (t_{i-1}, t_i] \Longrightarrow |t-s| < \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon = 1$. Logo a imagem da função é uma união finita de intervalos limitados (de comprimento menor ou igual a 1), sendo, portanto, limitada.

3. (*2.8 pontos*) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que existem e são iguais os limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Prove que vale pelo menos uma das afirmações abaixo:

(A) $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(B) $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \geq f(b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Temos que provar que f assume um máximo ou um mínimo. Seja $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. A menos que f seja constante, $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) > L$ ou $\exists\, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_2) < L$. O caso f constante é trivial, f assume máximo e mínimo. Suponhamos, então, que $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) > L$. O outro caso é similar. Seja $\varepsilon_0 = f(x_1) - L$. Existem A e B positivos tais que $x > B \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_0$ e também $x < -A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_0$. Portanto

$$f(x) < L + \varepsilon_0 = f(x_1)\,, \quad \forall x \in (-\infty, -A) \cup (B, +\infty)\,. \tag{1}$$

Aumentando A e B, se necessário, podemos supor que $x_1 \in [-A, B]$. Pelo Teorema de Weierstrass, como f é contínua, $\exists\, a \in [-A, B]$, ponto de máximo da restrição de f ao intervalo $[-A, B]$, isto é, tal que

$$f(x) \leq f(a)\,, \quad \forall x \in [-A, B]\,. \tag{2}$$

Mas $x_1 \in [-A, B]$. Portanto $f(x_1) \leq f(a)$. Combinando com (1), obtemos que

$$f(x) < f(a)\,, \quad \forall x \in (-\infty, -A) \cup (B, +\infty)\,,$$

que, junto com (2), implica que vale (A).

4. (*2.8 pontos*) Seja f uma função duas vezes derivável definida em um intervalo aberto contendo o intervalo $[0,1]$. Suponhamos que $f(0)=0$, $f(1)=1$ e $f'(0)=f'(1)=0$. Prove que pelo menos uma das seguintes situações ocorre:

$$\exists\, x_1 \in \left(0,\tfrac{1}{2}\right) \text{ tal que } f''(x_1) > 4 \qquad \text{ou} \qquad \exists\, x_2 \in \left(\tfrac{1}{2},1\right) \text{ tal que } f''(x_2) < -4\,.$$

Sugestão: Comece mostrando que se $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$, então existe x_1 como acima.

1ª Solução:

Dois casos podem ocorrer. Ou $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ ou $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

Suponhamos que $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$. Usando a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, $\exists\, x_1 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ tal que

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{1}{2} + \frac{f''(x_1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto, caso $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$, vamos ter

$$\tfrac{1}{2} \leq f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{f''(x_1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow f''(x_1) \geq 4\,.$$

No caso $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, novamente pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, $\exists\, x_2 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ tal que

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = f(1) + f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{f''(x_2)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto, caso $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, vamos ter

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{f''(x_1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow f''(x_2) < -4\,.$$

Obs. Quem fez até aqui recebeu ponto integral, mas note que ficou faltando mostrar que, no primeiro caso considerado, vale a desigualdade estrita. Vamos mostrar isto agora. É fácil ver que se $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$, pode-se garantir que vale $f''(x_1) > 4$. Suponhamos, então, que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Suponhamos, por absurdo, que $f''(x) \leq 4$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Definimos a função $g : [0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x^2$. Temos $g(0) = g'(0) = g(\frac{1}{2}) = 0$ e $g''(x) = f''(x) - 4 \leq 0$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Então g' é decrescente. Mas $g'(0) = 0$. Logo $g'(x) \leq 0$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Segue que g é decrescente. Como $g(0) = g(\frac{1}{2}) = 0$, então $g(x) = 0$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Logo $f(x) = 2x^2$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Analogamente, definindo a função $h : [0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, por $h(x) = f(x) - \left(1-(1-x)^2\right)$, mostra-se que a condição $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ implica que $f(x) = 1-(1-x)^2$, $\forall x \in (0,\frac{1}{2})$. Segue que

$$f''(x) = \begin{cases} 4\,, & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ -4\,, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

e, portanto, f'' teria uma descontinuidade de 1ª espécie em $\frac{1}{2}$, o que não é possível para uma derivada.

$2^{\underline{a}}$ *Solução*:

Dividimos em 3 casos: $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Caso $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

Queremos mostrar que $\exists\, x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $f''(x_1) > 4$. Por absurdo, suponhamos que $f''(x) \leq 4$, $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$. Definimos a função $g : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x^2$. Temos $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(x) = f''(x) - 4 \leq 0$, $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$. Então g' é decrescente. Mas $g'(0) = 0$. Logo $g'(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$. Segue que g é decrescente. Como $g(0) = 0$, então $g(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, \frac{1}{2})$. Em particular, $g(\frac{1}{2}) \leq 0$, ou seja, $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$, contrariando a hipótese.

Caso $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$

Queremos mostrar que $\exists\, x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $f''(x_2) < -4$. Por absurdo, suponhamos que $f''(x) \geq -4$, $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pondo $h : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \left(1 - 2(1-x)^2\right)$, temos $h(1) = h'(1) = 0$ e $h''(x) = f''(x) + 4 \geq 0$, $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Então h' é crescente. Mas $h'(1) = 0$. Logo $h'(x) \leq 0$, $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Segue que h é decrescente. Como $h(1) = 0$, então $h(x) \geq 0$, $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Em particular, $h(\frac{1}{2}) \geq 0$, ou seja, $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$, contrariando a hipótese.

Caso $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Pelo mesmo argumento dado na observação acima, supondo que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f''(x) \leq 4$ $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$ e $f''(x) \geq -4$ $\forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$ concluímos que f'' teria uma descontinuidde de $1^{\underline{a}}$ espécie, o que é uma contradição.

Obs. Quem *não conseguiu provar* o resultado pedido, mas **provou** a conlusão *mais fraca*, de que

$$\exists\, x_1 \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \text{ tal que } f''(x_1) > 2 \qquad \text{ou} \qquad \exists\, x_2 \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \text{ tal que } f''(x_2) < -2.$$

ganhou até 1.7 pontos. O raciocínio seria mais ou menos o seguinte:

(*Caso* $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$) Para $x \in [0, \frac{1}{2}]$, pelo TVM, $\exists\, c \in (0, x)$ t.q.

$$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(c).$$

Novamente pelo TVM, $\exists\, d \in (0, c)$ t.q.

$$f'(c) = f'(c) - f'(0) = cf''(d).$$

Portanto

$$f(x) = xf'(c) = cd\, f''(d), \text{ com } 0 < d < c < x \leq \tfrac{1}{2}.$$

Em particular, para $x = \frac{1}{2}$,

$$\tfrac{1}{2} \leq f\left(\tfrac{1}{2}\right) = cd\, f''(d), \text{ com } 0 < d < c < \tfrac{1}{2}.$$

A partir daí segue, de maneira imediata, que $f''(d) > 2$.