1. Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função de Hölder** se $\exists M > 0$ e $\exists \alpha \in (0,1]$ tais que $|f(x_1)-f(x_2)| \leq M|x_1-x_2|^\alpha$, $\forall x_1, x_2 \in I$. Note que no caso particular $\alpha = 1$, f é de Lipschitz.

(i) Mostre que se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.

(ii) Mostre que se na condição de Hölder permitíssemos que $\alpha > 1$, seguiria que $f'(x) = 0$, $\forall x$ no interior de I e, portanto, teríamos f constante (esta é a razão para impor a condição $\alpha \leq 1$ na definição).

(iii) Mostre que a função $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, satisfaz a condição de Hölder com $M = 1$ e $\alpha = \dfrac{1}{2}$ sendo, portanto, uniformemente contínua. **Sugestão:** Basta uma manipulação algébrica simples.

2. Mostre que a equação $3\,x^4+4\,x^3+c = 0$ tem no máximo uma raiz ≤ -1 . **Sug:** Use o TVM ou seus corolários.

3. Mostre que valem as desigualdades:

(i) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $\forall x \geq 0$. **Sugestão:** Lembre que $\arctan 0 = 0$ e aplique o Teorema do Valor Médio.

(ii) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \arcsin x \geq x$, $\forall x \in [0,1)$. Quando vale a igualdade?

(iii) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,x-1}{\sqrt{3}} < \arcsin x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, para $\dfrac{1}{2} < x < 1$. OBS: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

4. Seja f uma função contínua em $[0,a)$ e derivável em $(0,a)$ tal que $f(0) = 0$, f' crescente e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0,a)$. Prove que $\dfrac{f(x)}{x}$ é crescente.

5. **(i)** Seja f de classe C^{n+1} em uma vizinhança do ponto a. Pela Fórmula de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\,h^n \;, \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1 \;.$$

Prove que se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então $\theta \longrightarrow \dfrac{1}{n+1}$, quando $h \longrightarrow 0$. **Sugestão:** Compare a expressão da linha acima com o desenvolvimento de Taylor de ordem n.

(ii) Para $f(x) = x^{n+2}$ e $a = 0$, encontre o limite de θ quando $h \longrightarrow 0$.

Resp: $\theta = \sqrt{\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}}$.

6. **(i)** Seja $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Sabendo que $f(0) = 0$ e $f'(x) > 1$, $\forall x \in (0,\infty)$, prove que $f(x) > x$, $\forall x \in (0,\infty)$.

(ii) (Não tem nada a ver com o item (i)) Prove a desigualdade $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x \ , \quad \forall x > 0 \, .$
Sugestão: Use o Teorema do Valor Médio ou seus corolários.

7. Seja $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável t.q. $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \beta$. Prove que:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, se $\beta > 0$ e **(b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, se $\beta < 0$.

8. Justifique que $\forall c > 0$ a equação $x \ln x = c$ tem uma e uma só raiz $x > 0$. Justifique que para $e^{-1} < c < 0$ existem exatamente duas raízes $x > 0$.

9. Prove as desigualdades (**Sug:** TVM ou seus corolários):

(i) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x \ , \quad \forall x > 0 \, .$

(ii) $\arctan x < x - \dfrac{x^3}{6} \ , \quad \forall x \in (0, 1] \, .$

(iii) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} \ , \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \, .$

10. Justifique que $\forall n \in \mathbb{N}$, a equação $\tan x = x$ tem uma única raiz $t_n \in \big(n\,\pi - \frac{\pi}{2}, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\big)$ e que a função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é monótona decrescente no intervalo (t_{2n}, t_{2n+1}) e monótona crescente no intervalo (t_{2n-1}, t_{2n}) .

Solução:

Consideremos a função $f(x) = \tan x - x$, definida no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, isto é, na união de todos os intervalos do tipo $\big((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\big)$, para $n \in \mathbb{Z}$. Temos $f'(x) = \sec^2 x - 1$. Portanto $f(x) \geq 0$, anulando-se apenas em pontos isolados. Logo f é estritamente crescente em cada um dos intervalos $\big((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\big)$. Como

$$\lim_{x \to (n + \frac{1}{2})\pi^-} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (n + \frac{1}{2})\pi^+} f(x) = -\infty \, ,$$

segue do Teorema do Valor Intermediário que existe um único ponto $t_n \in \big(n\,\pi - \frac{\pi}{2}, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\big)$ tal que $f(x) = 0$.

Seja g a função $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Temos $g'(x) = \dfrac{x \cos x \, - \, \operatorname{sen} x}{x^2}$. Portanto

$$g'(x) = 0 \iff x \cos x \, = \, \operatorname{sen} x \iff f(x) = 0 \, ,$$

ou seja,

$$g'(x) = 0 \iff \exists \, n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } x = t_n \, .$$

A função f é estritamente crescente e se anula em t_n. Portanto $f(x) < 0$ para x à esquerda de t_n e $f(x) > 0$ para x à direita de t_n. Mas $g'(x) = -\dfrac{f(x) \cos x}{x^2}$. Levando em conta que

$$\cos x \begin{cases} > 0 \text{ em } \big(n\,\pi - \frac{\pi}{2}, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\big) \ , & \text{se } n \text{ par} \\ > 0 \text{ em } \big(n\,\pi - \frac{\pi}{2}, n\,\pi + \frac{\pi}{2}\big) \ , & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

temos que $g'(x)$ passa de valores negativos para positivos em t_{2n+1} e de valores positivos para negativos em t_{2n}. Logo os únicos pontos em que $g'(x) = 0$ são os da forma $x = t_n$, sendo pontos de mínimo local se n for ímpar de de máximo local se n for par. Logo g é monótona decrescente no intervalo (t_{2n}, t_{2n+1}) e monótona crescente no intervalo (t_{2n-1}, t_{2n}).

11. Mostre que a equação $x^n + p\,x + q = 0$ tem no máximo 2 raízes reais se n é par e no máximo 3 raízes reais se n é ímpar.

12. Sabe-se que em toda equação do terceiro grau $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$ o termo em x^2 pode ser eliminado através da substituição $x \longmapsto x - \frac{a}{3}$ (não é necessário provar isto). Prove que a equação $x^3 + p\,x + q = 0$ tem 3 raízes reais distintas $\iff 4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + p\,x + q$. Temos $f'(x) = 3x^2 + p$. Portanto

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = -\frac{p}{3}\,.$$

Segue que $f'(x) = 0$ tem duas soluções reais distintas se e somente se $p < 0$ e, neste caso, as duas soluções são $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponhamos que existam 3 números reais diferentes $x_1 < x_2 < x_3$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Então pelo Teorema de Rolle $\exists\,\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\exists\,\xi_2 \in (x_2, x_3)$ tais que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Pela observação acima,

$$\xi_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad , \qquad \xi_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

Além disto é necessário que

$$f(\xi_1) > 0 \quad \text{e} \quad f(\xi_2) < 0\,.$$

Mas

$$f(\xi_1) = \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \qquad \text{e} \qquad f(\xi_2) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\,.$$

Então

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0 < \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\,.$$

Segue que

$$q < \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \text{e} \qquad -q < \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\,,$$

ou seja,

$$|q| < \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

Finalmente, elevando ao quadrado, obtém-se

$$q^2 < -\frac{4p^3}{27}\,,$$

ou seja,

$$4p^3 + 27q^2 < 0\,.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suponhamos que $4p^3 + 27q^2 < 0$. Segue que $4p^3 < -27q^2 \leq 0$ e, portanto, $p < 0$. Logo, a equção $f'(x) = 0$ tem duas soluções diferentes

$$\xi_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \text{e} \qquad \xi_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

Calculando, encontramos

$$f(\xi_1) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \qquad \text{e} \qquad f(\xi_2) = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\,.$$

Então

$$f(\xi_1) = \sqrt{-\frac{4p^3}{27}} + q > \sqrt{\frac{27q^2}{27}} + q = \sqrt{q^2} + q = |q| + q \geq 0\,.$$

Analogamente prova-se que $f(\xi_2) < 0$.

Em resumo, provamos que se valer a condição $4p^3 + 27q^2 < 0$, então existem $\xi_1 < 0 < \xi_2$ tais que $f(\xi_1) > 0 > f(\xi_2)$. Combinando isto com o fato que os limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,$$

segue, pelo Teorema do Valor Intermediário, a existência de 3 números reais x_1, x_2, x_3, com $x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_2 < x_3$, tais que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

13. (i) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável t.q. $f(\pi) = \pi$ e $f(e) = e$. Mostre que $\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 1$.

(ii) (Não tem nada a ver com o item anterior) Prove as desigualdades $\dfrac{x-a}{x} < \ln\dfrac{x}{a} < \dfrac{x-a}{a}$, para $0 < a < x$. **Sugestão:** Use o Teorema do Valor Médio ou seus corolários.

14. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável t.q. $f(\frac{1}{n}) = 0$. Prove que $f''(0) = 0$.

15. Seja $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Supondo que existem $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$, prove que $B = 0$.

16. Prove que se $2 \leq a \leq 3$ então

$$a\,(1+x)^a \geq (a-1)\,(1+2\,x)^{a-1} + 1\,, \quad \forall\, x \geq 0\,.$$

Solução:

Para um número real a fixado, com $2 \leq a \leq 3$, seja $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a\,(1+x)^a - (a-1)\,(1+2\,x)^{a-1} - 1\,.$$

Queremos mostrar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$. Como $f(0) = 0$, é suficiente provar que f é crescente, ou seja, basta mostrar que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$. Mas

$$f'(x) = a^2(1+x)^{a-1} - 2(a-1)^2(1+2\,x)^{a-2}$$

e

$$f''(x) = a^2(a-1)\,(1+x)^{a-2} - 4(a-1)^2(a-2)\,(1+2\,x)^{a-3}\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f''(0) &= (a-1)\big(a^2 - 4(a-1)(a-2)\big) \\ &= -(a-1)\big(3a^2 - 12a + 8\big)\,. \end{aligned}$$

Temos que $f''(0) > 0$, para $2 \leq a \leq 3$, pois as raízes do polinômio $3a^2 - 12a + 8$ são

$$\frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{48}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{3}$$

e portanto o intervalo $[2,3]$ está contido no intervalo entre as raízes. Também

$$f'(0) = a^2 - 2(a-1)^2 = -a^2 + 4a - 2\,.$$

Temos que $f'(0) > 0$, para $2 \leq a \leq 3$, pois as raízes do polinômio $a^2 - 4a + 2$ são

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

Por outro lado, $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$, pois

$$\begin{aligned} f''(x) &= a^2(a-1)\,(1+x)^{a-2} - 4(a-1)^2(a-2)\,(1+2\,x)^{a-3} \\ &\geq a^2(a-1) - 4(a-1)^2(a-2) \\ &= -\big(a-1\big)\big(3a^2 - 12a + 8\big)\,. \end{aligned}$$

A desigualdade acima vale porque $a - 3 \leq 0 \leq a - 2$. Mas

$$3a^2 - 12a + 8 \leq 0 \quad \forall a \in [2,3]\,,$$

pois as raízes deste trinômio são $2 \pm \dfrac{\sqrt{12}}{3}$. Logo $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$, o que porva que f' é crescente nesta semi-reta. Como vimos acima, $f'(0) > 0$. Portanto $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$. Temos então que f é crescente em $\in [0,+\infty)$. Como $f(0) = 0$ segue, finalmente, que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$.