

1. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, então f é uniformemente contínua. Mostre com um exemplo que a recíproca é falsa.

Solução:

Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos que $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in (M, +\infty)$. Então

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in (M, +\infty).$$

Pela continuidade, a restrição de f ao intervalo $[0, M+1]$ é uniformemente contínua. Logo $\exists \delta_1 > 0$ t.q.

$$x_1, x_2 \in [0, M+1] \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$. Então, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $|x_1 - x_2| < \delta$, duas situações podem ocorrer: $x_1, x_2 \in [0, M+1]$ ou $x_1, x_2 \in (M, +\infty)$. A alternativa um deles estar em apenas um dos intervalos e outro apenas no outro intervalo, não pode ocorrer, pois $\delta \leq 1$. Vimos acima que em qualquer um dos dois casos possíveis, tem-se $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Logo f é uniformemente contínua.

A recíproca é falsa. f uniformemente contínua não implica que exista o limite. Por exemplo, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ é uniformemente contínua, pois $f'(x) = \cos x$ é limitada e, portanto f é de Lipschitz. Mas não existe o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Prove que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas $\implies g \circ f$ uniformemente contínua.

3. Suponha que f seja uniformemente contínua em $(-\infty, a]$ e em $[a, +\infty)$. Mostre que f é uniformemente contínua em todo $\mathbb{R}$. Mostre que o mesmo vale se a condição “uniformemente contínua” for substituída por “Lipschitz”.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que as restrições de f a cada uma das semi-retas $(-\infty, a]$ e $[a, +\infty)$ sejam uniformemente contínuas. Vamos mostrar que f é uniformemente contínua.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x_1, x_2 \in (-\infty, a], |x_1 - x_2| < \delta_1 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e também

$$x_1, x_2 \in [a, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta_2 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Afirmamos que

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $|x_1 - x_2| < \delta$. Podem ocorrer 3 casos:

Caso1: $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$

Neste caso

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |x_1 - x_2| < \delta_1 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Caso2: $x_1, x_2 \in (-\infty, a]$

Análogo ao anterior.

Caso3: $x_1 < a < x_2$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |x_1 - a| \leq |x_1 - x_2| < \delta_1 \implies |f(x_1) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da mesma forma, $|f(x_2) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_2))| \\ &\leq |f(x_1) - f(a)| + |f(a) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Logo f é uniformemente contínua.

Vamos mostrar que o mesmo vale para a condição de Lipschitz. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que as restrições de f a cada uma das semi-retas $(-\infty, a]$ e $[a, +\infty)$ sejam de Lipschitz. Então existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M_1|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in (-\infty, a]$ e $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M_2|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$. Seja $M = \max\{M_1, M_2\}$. Afirmamos que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Para os casos $x_1, x_2 \in (-\infty, a]$ e $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ isto é óbvio. Suponhamos que $x_1 < a < x_2$. Então

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_2))| \\ &\leq |f(x_1) - f(a)| + |f(a) - f(x_2)| \\ &\leq M_1|a - x_1| + M_2|x_2 - a| \leq M|x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

provando que f é de Lipschitz.

4. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Prove que f tem um ponto de máximo. Pode acontecer que f não tenha ponto de mínimo? Justifique.

Solução:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Seja $\varepsilon = f(0)$. Então, $\varepsilon > 0$. Então existem A e B positivos tais que

$$x > A \implies |f(x)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad x < -B \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Cmo f é contínua, f assume um máximo em $[-B, A]$, mais precisamente, $\exists x_0 \in [-B, A]$ t.q.

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in [-B, A].$$

Mas $0 \in [-B, A]$. Portanto, $f(0) \leq f(x_0)$. Segue que para $x \in \mathbb{R} \setminus [-B, A]$, $f(x) < \varepsilon = f(0) \leq f(x_0)$. Fica assim provado que

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Prove que se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, então f não é uniformemente contínua.

Solução:

Vamos mostrar que se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ for uniformemente contínua, então sua imagem é limitada. Consequentemente f não poderia ser sobrejetiva.

Supondo f uniformemente contínua, para $\varepsilon = 1$, existe um $\delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < 1$.

Escolhendo um número finito de pontos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

com $t_k - t_{k-1} < \delta$, $\forall j$, decompos o intervalo (a, b) em uma união finita

$$(a, b) = (t_0, t_1] \cup (t_1, t_2] \cup \dots \cup (t_{n-1}, t_n)$$

de intervalos de comprimento menor do que delta. Anotemos por

$$I_j = (t_{j-1}, t_j], \text{ se } 1 \leq j \leq n-1, \quad I_n = (t_{n-1}, t_n).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, cada $f(I_j)$ é um intervalo. Por outro lado, $\forall y, y' \in f(I_j)$, $\exists x, x' \in I_j$ tais que $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Segue que

$$|y - y'| = |f(x) - f(x')| < 1, \text{ pois } |x - x'| < \delta.$$

Logo cada $f(I_j)$ é um intervalo de comprimento menor ou igual a 1. Portanto a imagem de f é uma união

$$f((a, b)) = f(I_1) \cup f(I_2) \cup \dots \cup f(I_n)$$

de um conjunto finito de intervalos de comprimento menor ou igual a 1. Logo a imagem de f é um conjunto limitado.

6. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais, com $n \geq 2$ par e $a_n > 0$. Prove que p assume um mínimo em $\mathbb{R}$, isto é, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $p(x_0) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais, com $n \geq 2$ par e $a_n > 0$. Como n é par,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty.$$

Usando que

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

e que $a_n > 0$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = +\infty.$$

Fixemos uma constante $M > p(0)$. Então, existem, $A, B > 0$ t.q. $p(x) > M$, $\forall x \in (-\infty, -B) \cup (A, +\infty)$. O polinômio p é uma função contínua. Pelo Teorema de Weierstrass, p assume um mínimo em $[A, B]$, isto é,

$$\exists x_0 \in [-B, A], \text{ t.q. } p(x_0) \leq p(x), \forall x \in [-B, A].$$

Mas para $x \in \mathbb{R} \setminus [-B, A]$, temos $p(x) > M > p(0) \geq p(x_0)$. Portanto

$$p(x_0) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Prove que se $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(0) = f(2)$, então $\exists c \in [0, 1]$ t.q. $f(c) = f(c+1)$.
Sugestão: Considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

Solução:

Seja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(0) = f(2)$. Defina $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, por $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Então $g(0) = f(1) - f(0)$ e $g(1) = f(2) - f(1)$. Como $f(0) = f(2)$, segue que $g(0) = -g(1)$.

Se $g(0) = 0$, não há nada a provar, $c = 0$. Se $g(0) \neq 0$, então $g(0)$ e $g(1)$ têm sinais opostos, $g(0) < 0 < g(1)$ ou $g(0) > 0 > g(1)$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\exists c \in (0, 1)$ t.q. $g(c) = 0$ e, portanto, $f(c) = f(c+1)$.

8. Justifique se $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto 0 e se $\forall \alpha > 0$, $f|_{[\alpha, \infty)}$ (restrição de f) é uniformemente contínua em $[\alpha, \infty)$, então f é uniformemente contínua. Exemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em 0 e $f|_{[\alpha, \infty)}$ é de Lipschitz $\forall \alpha > 0$.

Solução:

Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto 0 e tal que $\forall \alpha > 0$, $f|_{[\alpha, \infty)}$ (restrição de f) é uniformemente contínua em $[\alpha, \infty)$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $\exists \delta_1 > 0$ tal que $|x - 0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $\alpha = \frac{\delta_1}{2}$. Então

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ t.q. } \forall x', x'' \in [\alpha, +\infty), |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vamos verificar que

$$\forall x', x'' \in [0, +\infty), |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Sejam $x', x'' \in [0, +\infty)$, com $|x' - x''| < \delta$. Podem ocorrer 3 casos:

1. $x', x'' \in [0, \alpha]$. Neste caso $|x' - 0| < \delta_1$ e $|x'' - 0| < \delta_1$. Logo $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(0)| + |f(0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2. $x', x'' \in [\alpha, +\infty)$. Neste caso $|x' - x''| < \delta \implies |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3. $x' < \alpha < x''$. Neste caso, como $|x' - x''| < \delta$, temos $|x' - \alpha| < \delta_1$ e, portanto, $|f(x') - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, $|\alpha - x''| < \delta_2$ e, conseqüentemente, $|f(x'') - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Segue que $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

9. (i) Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **contração** se $\exists K$, com $0 < K < 1$ t.q.

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Prove que toda contração $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem um e um só ponto fixo (isto é, um $x_f \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_f) = x_f$) e que $\forall a \in \mathbb{R}$ a sequência (x_n) definida recursivamente por $x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, converge para o ponto fixo x_f . **Sugestão:** Prove separadamente a unicidade do ponto fixo (mostre que se y e z forem pontos fixos, então $y = z$). Para $a \in \mathbb{R}$, comece definindo a sequência (x_n) como acima e mostrando que converge (use o Critério de Cauchy).

Solução:

Unicidade do ponto fixo:

Suponhamos que $y, z \in \mathbb{R}$ sejam tais que $f(y) = y$ e $f(z) = z$. Então

$$|y - z| = |f(y) - f(z)| \leq K|y - z|.$$

Se $|y - z| \neq 0$, então teríamos $1 \leq K$, o que contraria a hipótese. Logo $|y - z| = 0$, isto é, $y = z$. Isto prova que se existir ponto fixo, existe um só.

Existência do ponto fixo:

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos uma seqüência recursivamente

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Esta seqüência é de Cauchy, pois

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K|x_n - x_{n-1}|, \quad \forall n.$$

Aplicando repetidas vezes este argumento, segue que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \dots \leq K^{n-1}|x_2 - x_1|, \quad \forall n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (K^{n+p-2} + \dots + K^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq |x_2 - x_1| \sum_{j=n-1}^{\infty} K^j = \frac{|x_2 - x_1| K^{n-1}}{1 - K} \end{aligned}$$

Como $0 < K < 1$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $K^{n-1} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Segue que

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Fica assim provado que a seqüência (x_n) é de Cauchy. Conclui-se que $\exists t \in \mathbb{R}$ t.q. $x_n \rightarrow t$. Mas então, pela continuidade de f , tem-se $f(x_n) \rightarrow f(t)$. Levando em conta que $x_{n+1} = f(x_n)$, temos que $x_{n+1} \rightarrow f(t)$ e, portanto, $f(t) = t$. Fica assim provada a existência do ponto fixo, bem como estabelecido um método para encontrá-lo. Basta começar com um número real a qualquer e definir recursivamente uma seqüência como acima. Ela convergirá para o ponto fixo de f .

(ii) Mostre com um exemplo que se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição abaixo, que é mais fraca do que ser uma contração

$$x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

pode não existir ponto fixo. **Sugestão:** Procure um exemplo da forma $f(x) = x + \varphi(x)$, para uma $\varphi(x)$ conveniente.

Solução:

Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Então, $0 < \varphi(x) < \pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\varphi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \varphi(x)$. Então

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad 0 < f'(x) < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$x < y \implies |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)(y - x)| < |y - x|.$$

Portanto f é uma contração fraca. No entanto, f não possui ponto fixo, pois $f(x) = x + \varphi(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(a) < g(a)$, $f(b) < g(b)$ e que $\exists c \in (a, b)$ t.q. $f(c) > g(c)$. Prove que existe o último ponto x antes de c t.q. $f(x) \leq g(x)$, isto é, $\exists \alpha \in [a, c]$ t.q. $f(\alpha) = g(\alpha)$ e $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (\alpha, c]$.

Solução:

Defina $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, por $h(x) = f(x) - g(x)$. A função h é contínua. Temos $h(a) < 0$, $h(c) > 0$ e $h(b) < 0$. Seja $\mathcal{A} = \{x \in [a, c] \mid h(x) = 0\}$. Como $h(a) < 0 < h(c)$, pelo TVI, $\exists d \in (a, c)$ t.q. $h(d) = 0$. Logo $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, c é uma cota superior. Logo $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sup \mathcal{A}$. Evidentemente, $\alpha \in [a, c]$. Também é claro que $\alpha \neq a, c$, pois sendo h não nula nestes pontos, por continuidade h também não se anula em uma vizinhança destes pontos. Logo $\alpha \in (a, c)$. Afirmamos que $h(\alpha) = 0$. Basta mostrar que $h(\alpha)$ não pode ser positivo nem negativo. De fato, se $h(\alpha) > 0$, pela continuidade, $\exists \delta > 0$ t.q. $h(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Seguiria que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, contradizendo que $\alpha = \sup \mathcal{A}$. Logo $h(\alpha) > 0$ não pode ocorrer. Analogamente se prova que $h(\alpha) < 0$ não pode ocorrer. Logo $h(\alpha) = 0$. Resta mostrar que $h(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, c)$. Evidentemente h não pode se anular no intervalo (α, c) , pois caso contrário α não seria o $\sup \mathcal{A}$. Também $\nexists e \in (\alpha, c)$ com $h(e) < 0$, pois se existisse, como $h(c) > 0$, pelo TVI existiria $\beta \in (e, c)$ t.q. $h(\beta) = 0$.

11. Sejam I intervalo, $a \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **semicontínua inferiormente** no ponto a se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q.

$$x \in I, \quad |x - a| < \delta \implies f(x) > f(a) - \varepsilon.$$

(i) Prove que são equivalentes:

(A) f é semicontínua inferiormente no ponto a .

(B) $x_n \in I$, $x_n \rightarrow a \implies \liminf f(x_n) \geq f(a)$.

Solução:

(A) $\implies$ (B) Suponhamos que f é semicontínua inferiormente no ponto a . Precisamos provar que vale (B). Mas (B) é uma implicação. Para prová-la, suponhamos que $x_n \in I$, $x_n \rightarrow a$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $\exists \delta > 0$ t.q. $|x - a| < \delta \implies f(x) > f(a) - \varepsilon$. Seja $L = \liminf f(x_n)$. Existe uma subsequência $f(x_{n_k}) \rightarrow L$. Seja N t.q. $\forall n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. Portanto $\forall n_k \geq N$, $f(x_{n_k}) > f(a) - \varepsilon$. Segue que $L \geq f(a) - \varepsilon$, isto é, $\liminf f(x_n) \geq f(a) - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Logo $\liminf f(x_n) \geq f(a)$.

(B) $\implies$ (A) Basta mostrar que se não valer (A), então (B) também não vale. Suponhamos que f não seja semicontínua inferiormente no ponto a . Isto significa que $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$, $\exists x \in I$ t.q. $|x - a| < \delta$ e $f(x) \leq f(a) - \varepsilon_0$. Em particular, para $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in I$ t.q. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \leq f(a) - \varepsilon_0$. Então $x_n \rightarrow a$. Por outro lado, existe uma subsequência tal que $f(x_{n_k}) \rightarrow \liminf f(x_n)$. Logo $\liminf f(x_n) \leq f(a) - \varepsilon_0$, mostrando que (B) não valeria.

(ii) Dê um exemplo de função que é semicontínua inferiormente mas não contínua em um ponto.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

então f é semicontínua inferiormente no ponto 1, mas não é contínua neste ponto.

(iii) Prove que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em (todos os pontos de) $[a, b]$, então f é limitada inferiormente e assume um mínimo em $[a, b]$. **Sugestão:** Prove por absurdo.

Solução:

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente em $[a, b]$.

Afirmção: f é limitada inferiormente.

Se f não fosse limitada inferiormente, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ t.q. $f(x_n) < -n$. Pelo T. Bolzano–Weierstrass existiria uma subsequência $x_{n_k} \rightarrow \beta \in [a, b]$. Então $\liminf f(x_{n_k}) \geq f(\beta)$, o que é uma contradição, pois $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Logo f é limitada inferiormente.

Afirmção: f assume um mínimo.

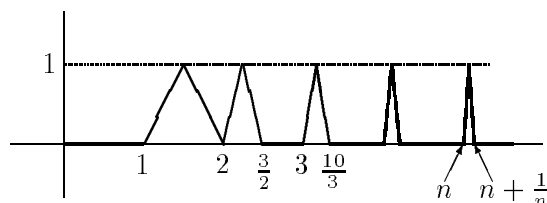
Seja $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Precisamos provar que $\exists \beta \in [a, b]$ t.q. $f(\beta) = m$. Pela definição de ínfimo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ t.q. $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$. Segue que $f(x_n) \rightarrow m$. Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe uma subsequência $x_{n_k} \rightarrow \beta \in [a, b]$. Pela semicontinuidade, $\liminf f(x_{n_k}) \geq f(\beta)$, isto é, $m \geq f(\beta)$. Mas $m \leq f(\beta)$. Logo $m = f(\beta)$, provando que f assume um mínimo.

12. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:

(i) f não é uniformemente contínua;

(ii) $\exists \varepsilon > 0$, $\exists x_n, y_n \in I$, t.q. $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n$.

(ii) Justifique que a função dada pelo gráfico abaixo não é uniformemente contínua.



(iii) Justifique que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$ não é uniformemente contínua. **Sugestão:** Faça um esboço do gráfico da função. Tente usar a mesma idéia do item (ii).

13. Sejam α e β fixados com $0 < \alpha < \beta$. Considere a equação

$$\frac{x^2}{\lambda - \alpha} + \frac{y^2}{\lambda - \beta} = 1.$$

Quando λ varia no intervalo (α, β) , a equação acima define uma família $\mathcal{F}_h$ de hipérbolas. Para $\lambda \in (\beta, +\infty)$ temos uma família $\mathcal{F}_e$ de elipses. Use o Teorema do Valor Intermediário para justificar que em cada ponto do plano fora dos eixos, passa uma curva de cada uma destas duas famílias.