1. Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona crescente e limitada. Prove que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in (a, +\infty)\}$.

Solução:

Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona crescente e limitada.
Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{f(x) \mid x \in (a, +\infty)\}$. Então f limitada implica $\mathcal{A}$ limitado. Também $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $f(a+1) \in \mathcal{A}$. Portanto, $\exists\, S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \sup \mathcal{A}$.
Vamos mostrar que $S = \lim\limits_{x\to+\infty} = f(x)$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de supremo, $\exists\, x_0 > a$ tal que $S - \varepsilon < f(x_0) \leq S$. Como f é crecente, então, $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x > x_0$. Combinando estes dois fatos, concluímos que

$$S - \varepsilon < f(x) \ , \ \forall x > x_0 \, .$$

Por outro lado, $f(x) \leq S$, pois $S = \sup \mathcal{A}$. Finalmente, temos

$$x > x_0 \Longrightarrow S - \varepsilon < f(x) \leq S \Longrightarrow |f(x) - S| < \varepsilon \, ,$$

porvando que $S = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Usando apenas a definição: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se e somente se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, M \geq a$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x > M$, prove que são equivalentes:

(i) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

(ii) para toda seqüência (x_n) em $(a, +\infty)$, $x_n \longrightarrow +\infty \implies f(x_n) \longrightarrow L$.

Solução:

Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona crescente e limitada.

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$

Suponhamos que vale (i), ou seja, que $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que vale (ii). Mas (ii) é uma implicação. Para provar a implicação, supomos que (x_n) é uma seqüência em $(a, +\infty)$, com $x_n \longrightarrow +\infty$. Precisamos mostrar que $f(x_n) \longrightarrow L$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, $\exists\, A > a$ tal que $\forall x > A$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $x_n \longrightarrow +\infty$, $\exists\, n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n > A$. Segue que $\forall n \geq n_0$, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Logo $f(x_n) \longrightarrow L$.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$

Basta provar que se não vale (i), então também não vale (ii). Suponhamos que (i) não vale. Então $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ para o qual não pode se encontrar A, isto é, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall A > a$ $\exists\, x > A$ t.q. $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.
Em particular, para $A = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n > n$ t.q. $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Portanto $x_n \longrightarrow +\infty$ mas $f(x_n) \not\longrightarrow L$. Logo não vale (i).

3. Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Analogamente ao exercício 2, escreva a definição de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e prove que são equivalentes:

(i) $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(ii) para toda seqüência (x_n) em $(a,+\infty)$, $x_n \longrightarrow +\infty \implies f(x_n) \longrightarrow +\infty$.

4. (i) Sejam $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [c,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(c) = g(c)$. Defina $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } x \le c \\ g(x)\,, & \text{se } x > c \end{cases}$. Mostre, a partir da definição, que h é contínua no ponto c.

Solução:

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em c, $\exists\,\delta_1 > 0$ t.q. $c - \delta < x \le c \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Logo $c - \delta_1 < x \le c \implies |h(x) - h(c)| < \varepsilon$. Analogamente, $\exists\,\delta_2 > 0$ t.q. $c \le x < c + \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \varepsilon$. Logo $c \le x < c + \delta_2 \implies |h(x) - h(c)| < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $c - \delta < x < c + \delta \implies |h(x) - h(c)| < \varepsilon$.

(ii) Dadas $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, defina uma nova função $f \vee g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}\,.$$

Prove que $f \vee g$ é contínua.

Solução:

Seja $h(x) = (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Seja $x_0 \in (a,b)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(x_0) \le g(x_0)$. Então $h(x_0) = g(x_0)$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

e

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Seja $\delta = \{\delta_1, \delta_2\}$. Vamos mostrar que

$$|x - x_0| < \delta \implies |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Seja x tal que $|x - x_0| < \delta$. Temos 2 casos a considerar.
Caso 1: Se $f(x) \le g(x)$.
Neste caso $h(x) = g(x)$ e, portanto, $|h(x) - h(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

Caso 2: Se $f(x) > g(x)$. Neste caso $h(x) = f(x)$ e

$$h(x) - h(x_0) = f(x) - g(x_0)\,.$$

Por um lado,

$$f(x) - g(x_0) \le f(x) - f(x_0) < \varepsilon\,.$$

Por outro lado,

$$f(x) - g(x_0) > g(x) - g(x_0) > -\varepsilon\,.$$

Juntando os 2 casos, temos que $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

ALTERNATIVA 1: Começa igual ao que foi feito acima, até o ponto em que vai considerar os 2 casos. Em vez de dividir em casos faz o seguinte:
Para todo x com $|x - x_0| < \delta$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \quad \text{e} \quad g(x_0) - \varepsilon < g(x)$$

implicam

$$f(x_0) - \varepsilon < \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad g(x_0) - \varepsilon < \max\{f(x), g(x)\}$$

e daí decorre que $\max\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon < \max\{f(x), g(x)\}$, ou seja, $h(x_0) - \varepsilon < h(x)$.
Analogamente se prova que para todo x com $|x - x_0| < \delta$, $h(x) < h(x_0) + \varepsilon$.

ALTERNATIVA 2: Usando a seguinte proposição

Proposição. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Dem:

Suponhamos que $a \geq b$ (se não for, trocamos os nomes). Então

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + (a - b)}{2} = a = \max\{a, b\} \ .$$

Aplicamos esta proposição para

$$h(x) = (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \ .$$

A soma, a diferença e o módulo de funções contínuas é contínua. Logo $h = f \vee g$ é contínua.

Observação. Analogamente tem-se que

$$a \wedge b = \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2} \ .$$

5. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. $\forall n$, $\exists\, x_n \in [a, b]$ t.q. $|f(x_n) - x_n| < \dfrac{1}{n}$. Prove que $\exists\, x \in [a, b]$ t.q. $f(x) = x$. **Sugestão:** Use o Teorema de Bolzano–Weierstrass.

Solução:

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e (x_n) uma seqüência em $[a, b]$ t.q. $|f(x_n) - x_n| < \dfrac{1}{n}$. A seqüência (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe uma subseqüência convergente $x_{n_k} \longrightarrow c$.
Mas $a \leq x_{n_k} \leq b$, $\forall n_k$. Pelo Teorema da Permanência do Sinal, segue que $a \leq c \leq b$, ou seja, $c \in [a, b]$.
Pela continuidade de f no ponto c, $x_{n_k} \longrightarrow c \Longrightarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(c)$. Mas, usando a hipótese $|f(x_n) - x_n| < \dfrac{1}{n}$, temos

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) < x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \ .$$

Segue, pelo Critério do sanduíche, que $f(x_{n_k}) \longrightarrow c$. Pela unicidade do limite temos então $f(c) = c$.

6. Sejam I um intervalo, c um ponto no interior deste intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Se $\delta > 0$ é suficientemene pequeno para que $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$, sejam

$$M_\delta(c) = \sup\{f(x) \mid x \in (c-\delta, c+\delta)\} \quad \text{e} \quad m_\delta(c) = \inf\{f(x) \mid x \in (c-\delta, c+\delta)\}$$

Definimos a oscilação de f no indervalo $(c-\delta, c+\delta)$ como

$$\omega_\delta(c) = M_\delta(c) - m_\delta(c) \ .$$

Prove que $\omega_\delta(c)$ é monótona como função de δ. Prove que existe

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_\delta(c) = \inf_{\delta > 0} \omega_\delta(c) \ .$$

A oscilação de f no ponto c é definida por

$$\omega(c) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_\delta(c) \ .$$

Prove que f é contínua no ponto $c \iff \omega(c) = 0$.

Para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \ , & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{se } x = 0 \end{cases}$, encontre $\omega(0)$.

Solução:

Temos que

$$0 < \delta_1 < \delta_2 \implies M_{\delta_1}(c) \leq M_{\delta_2}(c) \quad \text{e} \quad m_{\delta_1}(c) \geq m_{\delta_2}(c) \implies \omega_{\delta_1}(c) \leq \omega_{\delta_2}(c)$$

Isto mostra que para cada c fixo, a função $\delta \longmapsto \omega_\delta(c)$ é crescente. Segue que existe

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_\delta(c) = \inf_{\delta > 0} \omega_\delta(c) \ .$$

Afirmação: f é contínua no ponto $c \iff \omega(c) = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponhamos que f é contínua no ponto c. Seja $\varepsilon > 0$. Então $\exists\, \delta_0 > 0$ t.q. $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$, $\forall x \in (c - \delta_0, c + \delta_0)$. Tomando supremo e ínfimo, segue que $f(c) - \varepsilon \leq m_{\delta_0}(c)$ e $M_{\delta_0}(c) \leq f(c) + \varepsilon$. Portanto,

$$\omega_{\delta_0}(c) = M_{\delta_0}(c) - m_{\delta_0}(c) \leq 2\,\varepsilon \ .$$

Mas $\omega(c) = \inf\limits_{\delta > 0} \omega_\delta(c)$. Logo $\omega(c) \leq 2\,\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Segue daí que $\omega(c) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suponhamos que $\omega(c) = 0$. Vamos mostrar que f é contínua em c. Seja $\varepsilon > 0$. Segue de $\omega(c) = \inf\limits_{\delta > 0} \omega_\delta(c)$ que $\exists\, \delta_0 > 0$ t.q. $\omega_{\delta_0}(c) < \varepsilon$. Portanto $M_{\delta_0}(c) - m_{\delta_0}(c) < \varepsilon$. Mas

$$x \in (c - \delta_0, c + \delta_0) \Longrightarrow m_{\delta_0}(c) \leq f(x) \leq M_{\delta_0}(c) \ .$$

Somando esta última com $-M_{\delta_0}(c) \leq -f(c) \leq -m_{\delta_0}(c)$, que é obtida pela multiplicação de $m_{\delta_0}(c) \leq f(c) \leq M_{\delta_0}(c)$ por -1, obtém-se

$$-\big(M_{\delta_0}(c) - m_{\delta_0}(c)\big) \leq f(x) - f(c) \leq \big(M_{\delta_0}(c) - m_{\delta_0}(c)\big) \ .$$

Esta última desigualdade implica que

$$-\varepsilon < f(x) - f(c) < \varepsilon \ , \quad \forall x \in (c - \delta_0, c + \delta_0) \ .$$

Logo f é contínua no ponto c.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \ , & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\forall \delta > 0$, $M_\delta(0) = 1$ e $m_\delta(0) = -1$, seguindo daí que $\omega_\delta(0) = 2$. Tomando o ínfimo, obtém-se $\omega(0) = 2$.

7. Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. Para $t \geq a$, sejam M_t e m_t o supremo e o ínfimo de f no intervalo $(t, +\infty)$ e seja $\omega_t = M_t - m_t$ a oscilação de f em $(t, +\infty)$. Prove que $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \omega_t = 0$.

Solução:

Seja $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponhamos que $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists A > a$ tal que

$$L - \frac{\varepsilon}{3} < f(x) < L + \frac{\varepsilon}{3} \ , \qquad \forall x > A \ .$$

Tomando supremo e ínfimo, segue que

$$L - \frac{\varepsilon}{3} \leq m_t \leq M_t \leq L + \frac{\varepsilon}{3} \ , \qquad \forall t > A \ .$$

Portanto $\omega_t = M_t - m_t \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall t > A$. Logo $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega_t = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suponhamos que $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega_t = 0$. Seja (x_n) uma seqüência arbitrária em $(a, +\infty)$, com $x_n \longrightarrow +\infty$.

Afirmação 1: $f(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists A > a$ tal que $\omega_t < \varepsilon$, $\forall t > A$. Também $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > A$, $\forall n \geq n_0$. Logo $\forall n, m \geq n_0$, tem-se $-\varepsilon < -\omega_t = m_t - M_t \leq f(x_n) - f(x_m) \leq M_t - m_t = \omega_t < \varepsilon$. Portanto, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$. Logo $f(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy.

Afirmação 2: $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Precisamos, antes de mais nada, um candidato a limite. Aplicamos a Afirmação 1, com $x_n = n$. Existe $\lim f(n) = L \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para qualquer outra seqüência $y_n \longrightarrow +\infty$ em $(a, +\infty)$, $\big(f(y_n)\big)$ converge para o mesmo valor L. De fato, dada uma seqüência qualquer em $(a, +\infty)$, com $y_n \longrightarrow +\infty$, a partir dela e da seqüência $x_n = n$, definimos uma nova seqüência (z_n) por

$$z_{2n} = y_n \qquad \text{e} \qquad z_{2n+1} = x_n = n \ ,$$

isto é, "embaralhando" (x_n) e (y_n). Então $z_n \longrightarrow +\infty$. Pela Afirmação 1, $\big(f(z_n)\big)$ deve convergir. Mas como $z_{2n+1} = x_n$, $\big(f(x_n)\big)$ é uma subseqüência de $\big(f(z_n)\big)$. Como $f(x_n) \longrightarrow L$, então $f(z_n) \longrightarrow L$. Portanto $f(z_{2n}) \longrightarrow L$, ou seja, $f(y_n) \longrightarrow L$. Ficou provado que para qualquer seqüência $y_n \longrightarrow +\infty$ em $(a, +\infty)$, tem-se $f(y_n) \longrightarrow L$. Pelo exercício 2,

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x) \ .$$

8. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, onde $D \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto denso. Mostre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto denso. Supomhamos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Como D é denso, então existe uma seqüência (d_n) de elementos de D tal que $d_n \longrightarrow x$ (Élon, pág. 137). Pela continuidade de f e de g, segue que $f(d_n) \longrightarrow f(x)$ e $g(d_n) \longrightarrow g(x)$. Mas $f(d_n) = g(d_n)$, $\forall n$. Pela unicidade do limite, segue que $f(x) = g(x)$. Logo $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = a\,x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **Sugestão:** Seja $a = f(1)$. Considere a função contínua $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = a\,x$. Comece mostrando que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$. A seguir, mostre que a igualdade vale também para x da forma $x = 1/n$. Conclua que vale para todo x racional positivo. Use a continuidade e a densidade de $\mathbb{Q}$ para mostrar que vale para todo x real positivo. Mostre que $f(-x) = f(x)$. **Observação:** Existem funções descontínuas satisfazendo $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mas não da forma acima. Pode-se ver isto, levando em conta que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensão infinita.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Seja $a = f(1)$. Definimos uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, por $g(x) = a\,x$. Então g é contínua.

Afirmação 1: $f(n\,x) = n\,f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A prova é por indução. É imediato para $n = 1$.

Supondo que vale para um certo n que $f(n\,x) = n\,f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então $f\big((n+1)\,x\big) = f(n\,x + x) = f(n\,x) + f(x) = n\,f(x) + f(x) = (n+1)\,f(x)$ e vale também para $n+1$.

Afirmação 2: $f(n) = g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Basta aplicar o resultado da Afirmação 1 no caso particular $x = 1$.

Afirmação 3: $f(x) = g(x)$, para todo x da forma $x = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

De fato, $a = f(1) = f\Big(n \cdot \dfrac{1}{n}\Big) = n \cdot f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, onde para a última igualdade usamos a Afirmação 1. Logo $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{a}{n}$.

Afirmação 4: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$.

Seja $x \in \mathbb{Q}^+$. Então $x = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Pelas Afirmações 2 e 3, $f(x) = f\Big(m \cdot \dfrac{1}{n}\Big) = m \cdot f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{m}{n} \cdot f(1) = \dfrac{m}{n} \cdot a = g(x)$

Afirmação 5: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Seja $x \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{Q}$ é denso, existe uma seqüência $r_n \in \mathbb{Q}^+$, com $r_n \longrightarrow x$. Pela Afirmação 4, $f(r_n) = g(r_n)$. Mas pela continuidade, $f(r_n) \longrightarrow f(x)$ e $g(r_n) \longrightarrow g(x)$. Logo $f(x) = g(x)$.

Afirmação 6: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Primeiro provamos que $f(0) = 0$. Temos $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Logo $f(0) = 0$. Em seguida, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$. Logo $f(-x) = -f(x)$.

Afirmação 7: $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Na Afirmação 5, já foi provado para $x \geq 0$. Se $x < 0$, então $-x > 0$ e, portanto $f(-x) = g(-x)$. Mas então, pela Afirmação 6, vale também $f(x) = g(x)$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. $f(x+y) = f(x)\, f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ t.q. $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **Sugestão:** Inspire-se no exercício anterior.

Solução:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. $f(x+y) = f(x)\, f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Seja $a = f(1)$. Queremos definir uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, por $g(x) = a^x$. Para podermos fazer isto precisamos mostrar que $a \geq 0$.

Afirmação 1: $a \geq 0$.

Basta notar que

$$a = f(1) = f\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = \Big(f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \implies a \geq 0 \; .$$

Conseqüentemente a função g acima está bem definida.

Afirmação 2: $f(0) = 0$ ou 1.

Observemos que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = \big(f(0)\big)^2 \implies f(0) = 0 \text{ ou } 1 \; .$$

Se $f(0) = 0$, então $f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Neste caso, já está provado, pois $f(x) = 0 = 0^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A partir deste ponto vamos considerar o caso $f(0) = 1$.

Afirmação 3: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x) \implies f(-x) = \frac{1}{f(x)} \;, \forall x \in \mathbb{R} \; .$$

Afirmação 4: $f(n\, x) = \big(f(x)\big)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A demonstração é análoga à da Afirmação 1 do exercício 9.

Afirmação 4: $f(n) = g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A prova é análoga à da Afirmação 2 do exercício 9.

Afirmação 5: $f(x) = g(x)$, para todo x da forma $x = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

De fato, $a = f(1) = f\Big(n \cdot \dfrac{1}{n}\Big) = \Big(f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)^{\frac{1}{n}}$, pois $a > 0$. Logo $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = a^{\frac{1}{n}}$.

Afirmação 6: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$.

Afirmação 7: $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Afirmação 8: $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

As Demonstrações são análogas, respectivamente às das Afirmações 4, 5 e 7 do exercício 9.