1. (ex. 37, pg. 73) Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos limitados superiormente e não vazios. Defina

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \ , \ y \in B\} \ .$$

Prove que $A{+}B$ também é não vazio e limitado superiormente e que $\sup(A{+}B) = \sup A{+}\sup B$.

Solução:

$A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_0 \in A$. $B \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, y_0 \in B$. Logo $x_0 + y_0 \in (A + B)$. Segue que $A + B \neq \emptyset$.

Sejam $a = \sup A$ e $b = \sup B$. Então $x \leq a$, $\forall x \in A$ e $y \leq b$, $\forall y \in B$. Logo $x + y \leq a + b$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Segue que $A + B$ é limitado superiormente, sendo $a + b$ uma cota superior. Conclui-se daí que existe $\sup(A + B)$ e que $a + b \leq \sup(A + B)$, pois $a + b$ é uma cota superior para $A + B$ e $\sup(A + B)$ é a menor das cotas superiores. Fica assim mostrado que

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B \ .$$

Falta mostrar a desigualdade no sentido contrário. Seja $\varepsilon > 0$. Então,

$$\exists\, x_1 \in A \ \text{ tal que } \ x_1 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Da mesma forma,

$$\exists\, y_1 \in B \ \text{ tal que } \ y_1 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Somando as duas desigualdades, obtemos

$$x_1 + y_1 > \sup A + \sup B - \varepsilon \ .$$

Como $\sup(A + B) \geq x_1 + y_1$, segue que

$$\sup(A + B) > \sup A + \sup B - \varepsilon \ , \ \forall\, \varepsilon > 0 \, .$$

Conclui-se daí que

$$\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B \, .$$

Combinando com a desigualdade contrária, obtida anteriormente, segue, finalmente, a igualdade

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \, .$$

2. (ex. 38, pg. 73) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **limitada superiormente** se sua imagem, $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, for um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Neste caso define-se o supremo de f (e denota-se por $\sup f$) como sendo o supremo do conjunto $f(X)$. Dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a soma $f + g$ é a função $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(i) Prove que se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são limitadas superiormente, então $f + g$ também é limitada superiormente, com

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g \ .$$

Solução:

Suponhamos que as funções f e g são limitadas superiormente. Sejam $a = \sup f$ e $b = \sup g$. Então

$$\forall x \in X\,,\ f(x) \leq a \quad \text{e} \quad g(x) \leq b\,.$$

Somando estas duas desigualdades, obtemos

$$f(x) + g(x) \leq a + b\,, \forall x \in X\,.$$

Segue que $f + g$ é limitada superiormente, com $a + b$ uma cota superior para $f + g$. Como o supremo é a menor das cotas superiores, temos que os supremos de $f + g$ existe e satisfaz

$$\sup\big(f + g\big) \leq a + b\,,$$

ou seja,

$$\sup\big(f + g\big) \leq \sup f + \sup g\,.$$

(ii) Mostre, com um exemplo, que no item anterior a desigualdade pode ser estrita. **Sugestão:** tome $X = [-1,\, 1]$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.

3. (ex. 36) Para $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado e não vazio e $c > 0$, definindo $c \cdot A = \{c\,x \mid x \in A\}$, prove que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

Solução:

$A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_0 \in A$. Logo $c\,x_0 \in (c \cdot A)$. Segue que $c \cdot A \neq \emptyset$.

Seja $a = \sup A$. Então $x \leq a$, $\forall x \in A$. Logo $c\,x \leq c\,a$, $\forall x \in A$. Segue que $c \cdot A$ é limitado superiormente, sendo $c\,a$ uma cota superior. Conclui-se daí que existe $\sup(c \cdot A)$ e que

$$\sup(c \cdot A) \leq c \cdot \sup A\,.$$

Falta mostrar a desigualdade no sentido contrário. Seja $\varepsilon > 0$. Então,

$$\exists\, x_1 \in A \text{ tal que } x_1 > \sup A - \frac{\varepsilon}{c}\,.$$

Multiplicando a desigualdade por c, obtemos

$$c\,x_1 > c \cdot \sup A - \varepsilon\,.$$

Como $\sup(c \cdot A) \geq c\,x_1$, segue que

$$\sup(c \cdot A) > c \cdot \sup A - \varepsilon\,,\ \forall \varepsilon > 0\,.$$

Conclui-se daí que

$$\sup(c \cdot A) \geq c \cdot \sup A\,.$$

Combinando com a desigualdade contrária, obtida anteriormente, segue, finalmente, a igualdade

$$\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A\,.$$

4. (ex. 39) Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ limitados e não vazios, definindo $A \cdot B = \{x\,y \mid x \in A\,, y \in B\}$, prove que $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$ e $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$.

Solução:

$A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_0 \in A$. $B \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, y_0 \in B$. Logo $x_0\,y_0 \in (A \cdot B)$. Segue que $A \cdot B \neq \emptyset$.

Sejam $a = \sup A$ e $b = \sup B$. Então $0 < x \leq a$, $\forall x \in A$ e $0 < y \leq b$, $\forall y \in B$. Logo $x\,y \leq a\,b$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Segue que $A \cdot B$ é limitado superiormente, sendo $a\,b$ uma cota superior. Conclui-se daí que existe $\sup(A \cdot B)$ e que

$$\sup\big(A \cdot B\big) \leq \big(\sup A\big) \cdot \big(\sup B\big)\,.$$

Falta mostrar a desigualdade no sentido contrário. Seja $\varepsilon > 0$. Então,

$$\exists\, x_1 \in A \text{ tal que } x_1 > \sup A - \varepsilon = a - \varepsilon\,.$$

Pela mesma razão,

$$\exists\, y_1 \in B \ \text{ tal que } \ y_1 > \sup B - \varepsilon = b - \varepsilon\,.$$

Multiplicando as duas desigualdades, obtemos

$$x_1\, y_1 > a\, b - (a + b + \varepsilon)\varepsilon\,.$$

Como $\sup(A \cdot B) \geq x_1\, y_1$, segue que

$$\sup(A \cdot B) > a\, b - (a + b + \varepsilon)\varepsilon\,,\ \forall \varepsilon > 0\,.$$

Logo

$$\sup(A \cdot B) > a\, b - (a + b + 1)\varepsilon\,,\ \forall \varepsilon \ \text{ com } \ 0 < \varepsilon < 1\,.$$

Conclui-se daí que

$$\sup(A \cdot B) \geq a\, b = \big(\sup A\big) \cdot \big(\sup B\big)\,.$$

Como já tínhamos obtido a desigualdade na outra direção, temos, então, a igualdade

$$\sup(A \cdot B) = \big(\sup A\big) \cdot \big(\sup B\big)\,.$$

Para o caso do ínfimo, se os ínfimos de A e de B forem ambos positivos, a demonstração é análoga, trocando os sentidos das desigualdades acima e também é feita em duas etapas. Mas se pelo menos um dos ínfimos se anular, a demonstração é mais simples ainda, precisando de uma só etapa. De fato, suponhamos que

$$\inf A = 0\,.$$

Vamos mostrar qe neste caso $\inf(A \cdot B) = 0$. Obviamente, $0 < x\, y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Precisamos apenas mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x_1 \in A \ \ \exists\, y_1 \in B$ t.q. $x_1\, y_1 < \varepsilon$. Seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos, arbitrariamente $y_1 \in B$. Como $\inf A = 0$, $\exists\, x_1 \in A$ t.q. $x_1 < \dfrac{\varepsilon}{y_1}$. Segue que $x_1\, y_1 < \varepsilon$, provando que $\inf\big(A \cdot B\big) = 0 = \big(\inf A\big) \cdot \big(\inf B\big)$.

6. (ex. 34) Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios t.q. $\forall x \in A\,, \forall y \in B\,,\ x \leq y$. Mostre que $\sup A \leq \inf B$. Mostre que vale a igualdade se e somente se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A$, $\exists\, y \in B$ t.q. $y - x < \varepsilon$.

Solução:

Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios t.q. $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$. Então, fixado $x \in A$, x é uma cota inferior para B. Mas $\inf B$ é a maior cota inferior de B. Logo $x \leq \inf B$. Isto vale para $\forall x \in A$, pois x foi fixado arbitrariamente. Logo $\inf B$ é uma cota superior de A. Segue que

$$\sup A \leq \inf B\,.$$

Vamos agora provar a equivalência

$$\sup A = \inf B \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, x \in A\,, \exists\, y \in B \text{ t.q. } \ y - x < \varepsilon\,.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

Suponhamos que $\sup A = \inf B$. Dado $\varepsilon > 0$, considere o número positivo $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Temos que

$$\exists\, x \in A\,, \text{ t. q. } \ x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

ou seja,

$$-x < -\sup A + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Também

$$\exists\, y \in B\,, \text{ t. q. } \ y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Somando as duas últimas, obtém-se

$$y - x < \varepsilon \, .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Suponhamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A$, $\exists\, y \in B$ t.q. $y - x < \varepsilon$. Então

$$\inf B \leq y < x + \varepsilon \leq \sup A + \varepsilon \, .$$

Temos, assim,

$$\inf B < \sup A + \varepsilon \, , \ \forall \varepsilon > 0 \, .$$

Segue que

$$\inf B \leq \sup A \, .$$

Mas a desigualdade no outro sentido vale sempre. Logo

$$\inf B = \sup A \, .$$

8. (ex. 51) Sejam X e Y conjuntos não vazios e seja $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada $x_0 \in X$ e cada $y_0 \in Y$, sejam $s_1(x_0) = \sup\{f(x_0, y) \mid y \in Y\}$ e $s_2(y_0) = \sup\{f(x, y_0) \mid x \in X\}$. Isto define funções $s_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $s_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que

$$\sup_{x \in X} s_1(x) = \sup_{y \in Y} s_2(y) \ .$$

Em outras palavras

$$\sup_{y \in Y} \Big[\sup_{x \in X} f(x, y) \Big] = \sup_{x \in X} \Big[\sup_{y \in Y} f(x, y) \Big] \ .$$

Solução:

Sejam X e Y conjuntos não vazios e seja $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja

$$A = \sup_{x \in X} s_1(x) = \sup_{x \in X} \Big[\sup_{y \in Y} f(x, y) \Big] \ .$$

e seja

$$B = \sup_{y \in Y} s_2(y) = \sup_{y \in Y} \Big[\sup_{x \in X} f(x, y) \Big] \ .$$

Temos, pela definição de supremo, que $s_1(x) \leq A, \ \forall x \in X$. Segue que

$$\sup_{y \in Y} f(x, y) \leq A \, , \ \forall y \in Y \, .$$

Logo

$$f(x, y) \leq A \, , \ \forall x \in X \, , \ \forall y \in Y \, .$$

Portanto

$$s_2(y) = \sup_{x \in X} f(x, y) \leq A \, , \ \forall y \in Y \, .$$

Segue que

$$B = \sup_{y \in Y} s_2(y) \leq A \, .$$

Fica, assim, provado que $B \leq A$. De modo inteiramente análogo se mostrar que $A \leq B$. Logo $A = B$.

9. (ex. 52) Sejam X e Y conjuntos não vazios e seja $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada $x_0 \in X$ e cada $y_0 \in Y$, sejam $i(x_0) = \inf\{f(x_0, y) \mid y \in Y\}$ e $s(y_0) = \sup\{f(x, y_0) \mid x \in X\}$. Isto define funções $i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $s : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que

$$\sup_{x \in X} i(x) \leq \inf_{y \in Y} s(y) .$$

Em outras palavras

$$\sup_{y \in Y} \Big[\inf_{x \in X} f(x, y) \Big] \leq \inf_{x \in X} \Big[\sup_{y \in Y} f(x, y) \Big] .$$

Dê um exemplo em que se tenha $<$ na desigualdade acima.

Solução:

Sejam X e Y conjuntos não vazios e seja $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja

$$A = \sup_{x \in X} i(x) = \sup_{x \in X} \Big[\inf_{y \in Y} f(x, y) \Big] .$$

e seja

$$B = \inf_{y \in Y} s(y) = \inf_{y \in Y} \Big[\sup_{x \in X} f(x, y) \Big] .$$

Fixando arbitrariamente $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, temos, pela definição de ínfimo, que

$$i(x_0) \leq f(x_0, y) , \ \forall y \in Y .$$

Em particular, para $y = y_0$, temos

$$i(x_0) \leq f(x_0, y_0) .$$

Analogamente, pela definição de supremo,

$$f(x, y_0) \leq s(y_0) , \ \forall x \in X .$$

Em particular, para $x = x_0$, temos

$$f(x_0, y_0) \leq s(y_0) .$$

Logo

$$i(x_0) \leq s(y_0) .$$

O elemento $x_0 \in X$ foi fixado arbitrariamente, isto é, pode ser qualquer elemento de X. Logo $s(y_0)$ é uma cota superior para o conjunto $\{i(x) \mid x \in X\}$. Logo

$$\sup_{x \in X} i(x) \leq s(y_0) .$$

Mas y_0 também pode ser qualquer elemento de Y. Conclui-se que $\sup\limits_{x \in X} i(x)$ é uma cota inferior para o conjunto $\{s(y) \mid y \in Y\}$. Segue que

$$\sup_{x \in X} i(x) \leq \inf_{y \in Y} s(y) .$$

EXEMPLO em que ocorre a desigualdade estrita. Sejam $X = Y = [0, 1]$. Em seguida, definimos $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = |x - y|$. Então

$$i(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) = f(x, x) = 0 , \ \forall x \in X$$

e, portanto,

$$\sup_{x \in X} i(x) = 0 .$$

Por outro lado,

$$s(y) = \sup_{x \in X} f(x, y) \geq \max\{f(0, y), f(1, y)\} = \max\{y, 1 - y\} \geq \frac{1}{2}\,,\ \forall y \in Y\,.$$

Portanto

$$\sup_{x \in X} i(x) = 0 < \frac{1}{2} \leq \inf_{y \in Y} s(y)\,.$$