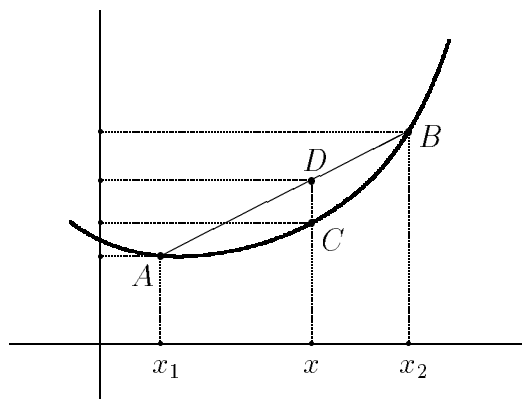


FUNÇÕES CONVEXAS



Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (limitado ou não). Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **convexa** se tiver a seguinte propriedade: Dados dois pontos A e B no gráfico de f , a corda que une estes dois pontos está sempre acima do gráfico de f .

Dados $x_1 < x < x_2$ em I , como na figura,

chamando de $\mu = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, temos

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad , \quad x = x_1 + (x - x_1) =$$

$$= x_1 + \mu(x_2 - x_1) = (1 - \mu)x_1 + \mu x_2 \quad ,$$

ou ainda, chamando $\lambda = 1 - \mu$,

$$x = \lambda x_1 + \mu x_2 \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad , \quad \mu \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda + \mu = 1 \quad .$$

Os pontos C e D da figura têm coordenadas

$$C = (\lambda x_1 + \mu x_2, f(\lambda x_1 + \mu x_2)) \quad \text{e} \quad D = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)) \quad .$$

A função f é convexa quando o ponto D está sempre acima de C . Isto se expressa como

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad , \quad \forall \lambda, \mu \geq 0 \quad \text{com} \quad \lambda + \mu = 1 \quad ,$$

vale

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \quad .$$

Uma figura $\mathcal{A}$ é convexa quando para quaisquer dois pontos A e B de $\mathcal{A}$, o segmento de reta que une A e B está totalmente contido em $\mathcal{A}$. A função f é convexa se e somente se o seu epigráfico, isto é, o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

que está acima de seu gráfico, é convexo. Esta é a justificativa para o nome função convexa.

Proposição 1. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um intervalo I é convexa se e somente se $\forall n \geq 2, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, tem-se

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) \quad . \quad (1)$$

Dem:

$\Leftarrow$ Supondo válida a condição (1) acima e tomando, em particular, $n = 2$, conclui-se que f é convexa.

$\Rightarrow$ Suponhamos que f é convexa. Vamos provar que vale a condição (1) para todo $n \geq 2$ por indução em n . Trivialmente ela vale para $n = 2$ (é a própria definição de função convexa). Suponhamos que (1) vale para um certo $n \geq 2$. Vamos mostrar que vale também para $n + 1$.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Podemos supor que $\lambda_{n+1} \neq 1$, pois se $\lambda_{n+1} = 1$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ e, neste caso, a condição (1) vale trivialmente, pois se reduz a $f(1 \cdot x_{n+1}) \leq 1 \cdot f(x_{n+1})$. Supondo, então, $\lambda_{n+1} \neq 1$, chamando

$$y = \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}}$$

e observando que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$ implica

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = 1,$$

teremos, pela convexidade de f e pela hipótese de indução,

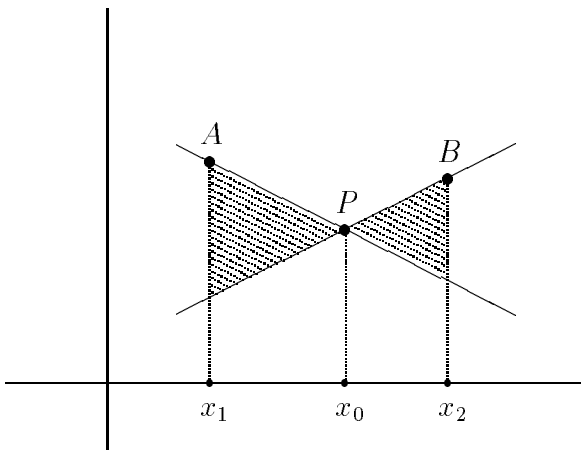
$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= (1 - \lambda_{n+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}}x_n\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}}f(x_n)\right] + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

provando que vale também para $n + 1$. Isto completa a indução.

A seguir veremos que as funções convexas são razoavelmente bem comportadas.

Proposição 2. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, então f é contínua em todo o ponto interior de I . Em particular, se I for um intervalo aberto, f é necessariamente contínua.

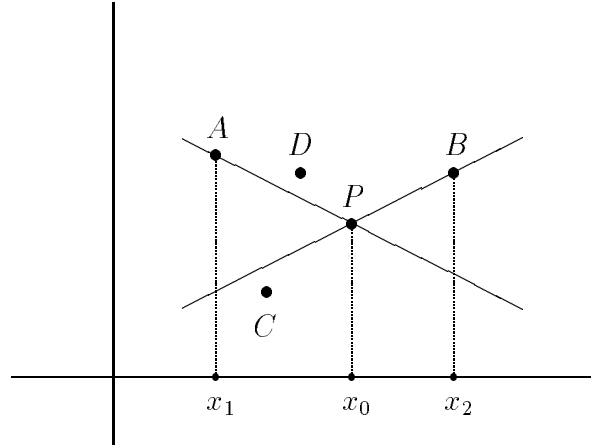
Dem:



Seja x_0 um ponto interior de I . Vamos provar que f é contínua em x_0 . Sendo x_0 um ponto interior de I , podemos escolher pontos $x_1 \in I$ à esquerda de x_0 e $x_2 \in I$ à direita de x_0 . Consideremos os pontos $A = (x_1, f(x_1))$, $P = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_2, f(x_2))$, que estão no gráfico de f , como na figura ao lado. Pelo fato de f ser convexa, P está abaixo (ou sobre) a reta $\overline{AB}$. Consideremos a região hachurada $\mathcal{H}$, limitada pelas retas $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ e pelas retas verticais $x = x_1$ e $x = x_2$. Se o ponto P estiver sobre a reta $\overline{AB}$, a região $\mathcal{H}$ se reduz ao segmento de reta $\overline{AB}$.

Vamos provar que a porção do gráfico de f entre x_1 e x_2 está contida na região $\mathcal{H}$. De fato, se o gráfico de f não ficasse dentro da região $\mathcal{H}$, então

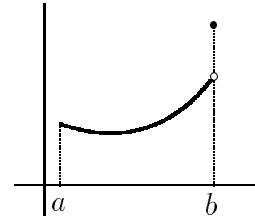
existiria um ponto C ou um ponto D como na figura ao lado, ou ainda pontos análogos, à direita de P . Mas qualquer uma destas possibilidades iria contrariar o fato de f ser convexa. Por exemplo, um ponto como C não pode pertencer ao gráfico de f , pois, se pertencesse, o ponto P estaria acima do segmento $\overline{CB}$. Um ponto como D não pode pertencer ao gráfico de f , pois, se pertencesse, o ponto D estaria acima do segmento $\overline{AP}$. Fica assim estabelecido que o gráfico de f fica contido na região $\mathcal{H}$. Daí segue que f é contínua no ponto x_0 , pois deve satisfazer uma desigualdade da forma



$$|f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|, \quad \forall x \in [x_1, x_2],$$

onde L é o máximo entre os valores absolutos das inclinações das retas $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.

Exemplo. A figura ao lado mostra o gráfico de uma função $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, definida em um intervalo que não é aberto e descontínua no ponto b , que é uma extremidade do intervalo e, portanto, não é ponto interior.



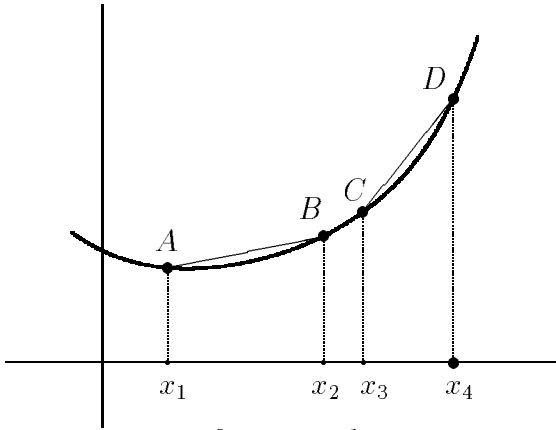
Funções Convexas Deriváveis

Se nos restringirmos à classe das funções deriváveis, vamos obter um critério de fácil aplicabilidade para verificar se uma função é convexa. Uma função convexa não é necessariamente derivável. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ é convexa, mas não tem derivada no ponto $x = 0$. Vamos ver depois que, de fato, uma função convexa não pode deixar de ter derivada em muitos pontos. Ela vai poder deixar de ter derivada no máximo em um conjunto enumerável de pontos.

Proposição 3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa definida em um intervalo I . Dados quatro pontos $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ em I , vale

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Dem:



e a proposição fica provada.

Usando a convexidade de f , temos que o ponto B está abaixo da corda $\overline{AC}$. Logo a inclinação de $\overline{AB}$ é menor ou igual à inclinação de $\overline{AC}$ e esta é menor ou igual à inclinação de $\overline{BC}$. Logo

$$\text{inclinação de } \overline{AB} \leq \text{inclinação de } \overline{BC}.$$

Analogamente,

$$\text{inclinação de } \overline{BC} \leq \text{inclinação de } \overline{CD}.$$

Logo

$$\text{inclinação de } \overline{AB} \leq \text{inclinação de } \overline{CD}$$

Observação. Usando o mesmo argumento que foi usado para provar a Proposição 3, pode-se provar que

$$\begin{aligned} & \text{inclinação de } \overline{AB} \leq \text{inclinação de } \overline{AC} \leq \text{inclinação de } \overline{BC} \\ & \leq \text{inclinação de } \overline{AD} \leq \text{inclinação de } \overline{BD} \leq \text{inclinação de } \overline{CD}. \end{aligned}$$

Proposição 4. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, f possui derivadas laterais em todos os pontos, valendo

$$x_1 < x_2 \implies f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2).$$

Além disto f é derivável exceto em um conjunto enumerável.

Dem:

Fixemos um ponto $x_2 \in (a, b)$, como na figura acima. Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \mid a < x_1 < x_2 \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \mid x_2 < x_3 < b \right\}$$

Segue da observação feita imediatamente após a Proposição 3 que $s \geq t$, $\forall s \in \mathcal{E}$, $\forall t \in \mathcal{D}$. Portanto

$$\sup \mathcal{E} \leq \inf \mathcal{D}.$$

Mas para x_2 fixo, a função $x_1 \in (a, x_2) \mapsto \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é crescente. Portanto

$$\sup \mathcal{E} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'_-(x_2).$$

Analogamente vê-se que

$$\inf \mathcal{D} = f'_+(x_2),$$

provando que

$$f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2), \quad \forall x_2 \in (a, b).$$

Fixemos agora $x_1, x_4 \in (a, b)$, com $x_1 < x_4$. Vamos Para $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, usando que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

e passando ao limite para $x_2 \rightarrow x_1^+$ e $x_3 \rightarrow x_4^-$, obtém-se

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_4).$$

Finalmente, seja $\mathcal{C} = \{x \in (a, b) \mid \nexists f'(x)\}$. Queremos provar que $\mathcal{C}$ é enumerável. A cada $x \in \mathcal{C}$, corresponde um intervalo aberto $I_x = (f'_-(x), f'_+(x))$. Pela parte já provada, temos que

$$x, \bar{x} \in \mathcal{C}, \quad x \neq \bar{x} \implies I_x \cap I_{\bar{x}} = \emptyset.$$

Então, se para cada $x \in \mathcal{C}$, escolhermos um racional $r_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$, vamos ter uma aplicação injetiva $x \in \mathcal{C} \mapsto r_x \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue que $\mathcal{C}$ é enumerável.

Proposição 5. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então f é convexa se e somente se f' é crescente (isto é, $x_1 \leq x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$).

Dem:

$\implies$ Suponhamos que f seja convexa e derivável. Segue da Proposição 4 que f' é crescente, isto é, se $x < \bar{x}$ são pontos de (a, b) , então $f'(x) \leq f'(\bar{x})$.

$\impliedby$ Suponhamos que f' seja crescente. Vamos provar que f é convexa. Sejam $x_1 < x_2$ em (a, b) e seja $0 < \lambda < 1$. Seja $\bar{x} = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$. Então $x_1 < \bar{x} < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $\xi_1 \in (x_1, \bar{x})$ e $\xi_2 \in (\bar{x}, x_2)$ t.q.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(x_1) &= f'(\xi_1)(\bar{x} - x_1) = f'(\xi_1)\lambda(x_2 - x_1) \\ f(x_2) - f(\bar{x}) &= f'(\xi_2)(x_2 - \bar{x}) = f'(\xi_2)(1 - \lambda)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $1 - \lambda$, a segunda por λ e subtraindo, obém-se

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(\bar{x}) = \lambda(1 - \lambda)(x_2 - x_1)(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)) \geq 0.$$

A última desigualdade vale pois f' é crescente. Logo

$$f(\bar{x}) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

isto é, f é convexa.

Corolário. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Então f é convexa se e somente se $f'' \geq 0$ em (a, b) .

Observação. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **estritamente convexa** quando, dados dois pontos A e B em seu gráfico, além da corda $\overline{AB}$ estar acima do gráfico de f , ela toca o

gráfico apenas nos pontos A e B . Por exemplo, uma função constante é convexa, mas não é estritamente convexa. Temos que f é estritamente convexa quando

$$\forall x_1, x_2 \in I, \text{ com } x_1 \neq x_2, \forall \lambda, \mu > 0, \text{ com } \lambda + \mu = 1,$$

vale

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) < \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

Olhando as demonstrações acima, é fácil ver que:

1º Se f é derivável, então f é estritamente convexa se e somente se f' é estritamente crescente ($x_1 < x_2 \implies f'(x_1) < f'(x_2)$).

2º Se f é duas vezes derivável e se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então f é estritamente convexa. A recíproca é falsa. **Exercício:** Encontre um contra-exemplo. Sugestão: tome $f(x) = x^n$, para um n conveniente.

Exemplos de Aplicações

Exemplo 1. (Desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica)

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Provar que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

valendo a igualdade se e somente se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Solução: Consideremos a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x = \exp x$. Como $f''(x) = e^x > 0$, concluímos que f é convexa e até estritamente convexa. Temos, então, que

$$\forall b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0 \text{ com } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1,$$

vale

$$\exp(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n) \leq \lambda_1 e^{b_1} + \lambda_2 e^{b_2} + \dots + \lambda_n e^{b_n},$$

com igualdade se e somente se $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Para $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, aplicando a desigualdade acima com

$$b_j = \ln a_j \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

temos

$$\exp\left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}\right) \leq \frac{\exp \ln a_1 + \exp \ln a_2 + \dots + \exp \ln a_n}{n},$$

isto é,

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

com igualdade se e somente se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Exemplo 2. Usando a função $f(x) = x \ln x$, prove que

$$\forall a, b, x, y > 0 \quad , \quad x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{a + b} \quad ,$$

com igualdade se e somente se $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Solução: Para a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, temos $f'(x) = 1 + \ln x$ e f' é estritamente crescente. Logo f é estritamente convexa.

Dados $a, b > 0$, tomando $\lambda = \frac{a}{a+b}$ e $\mu = \frac{b}{a+b}$, temos $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu > 0$. Portanto

$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = f\left(\frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right) \quad ,$$

isto é,

$$\frac{x+y}{a+b} \ln \frac{x+y}{a+b} \leq \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b} \ln \frac{y}{b} \quad ,$$

ou ainda,

$$(x+y) \ln \frac{x+y}{a+b} \leq x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \quad ,$$

com igualdade se e somente se $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Exemplo 3. Sejam $p, p' > 1$ números reais satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mostre que

$$a b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad , \quad (2)$$

com igualdade se e somente se $a = b$.

OBS. Um caso particular é $p = p' = \frac{1}{2}$. Temos, então, a desigualdade bem conhecida

$$a b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad .$$

Solução:

$$a b = \exp \ln a b = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'}\right) \quad .$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, usando o fato que a função exponencial é estritamente convexa, temos,

$$a b \leq \frac{1}{p} \exp \ln a^p + \frac{1}{p'} \exp \ln b^{p'} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad ,$$

com igualdade se e somente se $a = b$.

A desigualdade deste exemplo é importante, pois dela segue, de maneira imediata, que dados $p, p' > 1$ n^{os} reais satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ com os a_j e b_j não nulos, tem-se

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n |a_j|^p + \frac{1}{p'} \sum_{j=1}^n |b_j|^{p'} . \quad (3)$$

Como consequência desta última, segue a famosa

Desigualdade de Hölder. Sejam $p, p' > 1$ n^{os} reais satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Para quaisquer vetores $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} . \quad (4)$$

OBS. Um caso particular da Desigualdade de Hölder, correspondendo à escolha $p = p' = \frac{1}{2}$, é a Desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Demonstração:

Dados $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, sejam

$$A = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad B = \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} .$$

Se $A = 0$, então $x_j = 0$, $\forall j$ e (4) vale trivialmente. Da mesma forma, se $B = 0$, (4) também vale. Podemos, então, supor que $A > 0$ e $B > 0$. Sejam

$$a_j = \frac{x_j}{A} \quad \text{e} \quad b_j = \frac{y_j}{B} , \quad \forall j .$$

É fácil ver que

$$\sum_{j=1}^n |a_j|^p = \sum_{j=1}^n |b_j|^{p'} = 1$$

Logo, pela desigualdade (3),

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq 1 .$$

Segue que

$$\sum_{j=1}^n \frac{|x_j y_j|}{A B} \leq 1 ,$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq A B ,$$

que é a Desigualdade de Hölder (4).

Exemplo 4. Dados n^{os} reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, então para todos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$ tem-se

$$a_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\alpha_n} + b_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_n^{\alpha_n} \leq (a_1 + b_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)^{\alpha_n} , \quad (5)$$

com igualdade se e somente se $\frac{b_1}{a_1} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$.

Solução:

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Temos

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad , \quad f''(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 .$$

Logo f é estritamente convexa. Portanto,

$$f\left(\alpha_1 \ln \frac{b_1}{a_1} + \dots + \alpha_n \ln \frac{b_n}{a_n}\right) \leq \alpha_1 f\left(\ln \frac{b_1}{a_1}\right) + \dots + \alpha_n f\left(\ln \frac{b_n}{a_n}\right) ,$$

isto é,

$$f\left(\ln \left[\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right]\right) \leq \alpha_1 \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) + \dots + \alpha_n \ln\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) ,$$

ou ainda,

$$\ln\left(1 + \frac{b_1^{\alpha_1} \dots b_n^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}}\right) \leq \ln\left[\left(\frac{a_1 + b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{a_n + b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right] .$$

Logo

$$\ln\left(\frac{a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} + b_1^{\alpha_1} \dots b_n^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}}\right) \leq \ln\left(\frac{(a_1 + b_1)^{\alpha_1} \dots (a_n + b_n)^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}}\right) .$$

Daí segue a desigualdade (5). Como f é estritamente convexa, ocorre igualdade se e somente se $\ln \frac{b_1}{a_1} = \dots = \ln \frac{b_n}{a_n}$, isto é, se e somente se $\frac{b_1}{a_1} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$.