MAT–013 e 318 LISTA 9 Prof. Eduardo

Para serem entregues em aula dia 27.01.03 *impreterivelmente*.

1. Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função de Hölder** se $\exists M > 0$ e $\exists \alpha \in (0,1]$ tais que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$, $\forall x_1, x_2 \in I$. Note que no caso particular $\alpha = 1$, f é de Lipschitz.

(i) Mostre que se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.

(ii) Mostre que se na condição de Hölder permitíssemos que $\alpha > 1$, seguiria que $f'(x) = 0$, $\forall x$ no interior de I e, portanto, teríamos f constante (esta é a razão para impor a condição $\alpha \leq 1$ na definição).

(iii) Mostre que a função $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, satisfaz a condição de Hölder com $M = 1$ e $\alpha = \dfrac{1}{2}$ sendo, portanto, uniformemente contínua. **Sugestão:** Basta uma manipulação algébrica simples.

2. Mostre que a equação $3\,x^4 + 4\,x^3 + c = 0$ tem no máximo uma raiz ≤ -1. **Sug:** Use o TVM ou seus corolários.

3. Mostre que valem as desigualdades:

(i) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $\forall x \geq 0$. **Sugestão:** Lembre que $\arctan 0 = 0$ e aplique o Teorema do Valor Médio.

(ii) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \arcsin x \geq x$, $\forall x \in [0,1)$. Quando vale a igualdade?

(iii) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,x-1}{\sqrt{3}} < \arcsin x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, para $\dfrac{1}{2} < x < 1$. OBS: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

4. Seja f uma função contínua em $[0,a)$ e derivável em $(0,a)$ tal que $f(0) = 0$, f' crescente e $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0,a)$. Prove que $\dfrac{f(x)}{x}$ é crescente.

5. **(i)** Seja f de classe C^{n+1} em uma vizinhança do ponto a. Pela Fórmula de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\,h^n\ , \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1\ .$$

Prove que se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então $\theta \longrightarrow \dfrac{1}{n+1}$, quando $h \longrightarrow 0$. **Sugestão:** Compare a expressão da linha acima com o desenvolvimento de Taylor de ordem n.

(ii) Para $f(x) = x^{n+2}$ e $a = 0$, encontre o limite de θ quando $h \longrightarrow 0$.

Resp: $\theta = \sqrt{\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}}$.

6. (i) Seja $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável. Sabendo que $f(0)=0$ e $f'(x)>1$, $\forall x\in(0,\infty)$, prove que $f(x)>x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(ii) (Não tem nada a ver com o item (i)) Prove a desigualdade $x-\dfrac{x^3}{3}<\arctan x$, $\forall x>0$. **Sugestão:** Use o Teorema do Valor Médio ou seus corolários.

7. Seja $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável t.q. $\exists\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\beta$. Prove que:

(a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, se $\beta>0$ e **(b)** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, se $\beta<0$.

8. Justifique que $\forall c>0$ a equação $x\ln x=c$ tem uma e uma só raiz $x>0$. Justifique que para $e^{-1}<c<0$ existem exatamente duas raízes $x>0$.

9. Prove as desigualdades (**Sug:** TVM ou seus corolários):

(i) $x-\dfrac{x^3}{3}<\arctan x$, $\forall x>0$.

(ii) $\arctan x<x-\dfrac{x^3}{6}$, $\forall x\in(0,1]$.

(iii) $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$, $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

10. Justifique que $\forall n\in\mathbb{N}$, a equação $\tan x=x$ tem uma única raiz $t_n\in(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2})$ e que a função $\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ é monótona decrescente no intervalo (t_{2n},t_{2n+1}) e monótona crescente no intervalo (t_{2n-1},t_{2n}) .

11. Mostre que a equação $x^n+px+q=0$ tem no máximo 2 raízes reais se n é par e no máximo 3 raízes reais se n é ímpar.

12. Sabe-se que em toda equação do terceiro grau $x^3+ax^2+bx+c=0$ o termo em x^2 pode ser eliminado através da substituição $x\longmapsto x-\frac{a}{3}$ (não é necessário provar isto). Prove que a equação $x^3+px+q=0$ tem 3 raízes reais distintas $\iff$ $4p^3+27q^2<0$.

13.(i) Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável t.q. $f(\pi)=\pi$ e $f(e)=e$. Mostre que $\exists x\in\mathbb{R}$ t.q. $f'(x)=1$.

(ii) (Não tem nada a ver com o item anterior) Prove as desigualdades $\dfrac{x-a}{x}<\ln\dfrac{x}{a}<\dfrac{x-a}{a}$, para $0<a<x$. **Sugestão:** Use o Teorema do Valor Médio ou seus corolários.

14. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ duas vezes derivável t.q. $f(\frac{1}{n})=0$. Prove que $f''(0)=0$.

15. Seja $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável. Supondo que existem $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ e $\lim_{x\to\infty}f'(x)=B$, prove que $B=0$.

16. Prove que se $2\le a\le 3$ então

$$a\,(1+x)^a\ge(a-1)\,(1+2\,x)^{a-1}+1\ ,\quad \forall\,x\ge 0\ .$$