MAT–013 e 318 LISTA 8 Prof. Eduardo

Para serem entregues em aula dia 20.01.03 *impreterivelmente.*

1. Seja $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, então f é uniformemente contínua. Mostre com um exemplo que a recíproca é falsa.

2. Prove que $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas $\Longrightarrow g \circ f$ uniformemente contínua.

3. Suponha que f seja uniformemente contínua em $(-\infty, a]$ e em $[a, +\infty)$. Mostre que f é uniformemente contínua em todo $\mathbb{R}$. Mostre que o mesmo vale se a condição "uniformemente contínua" for substituída por "Lipschitz".

4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Prove que f tem um ponto de máximo. Pode acontecer que f não tenha ponto de mínimo? Justifique.

5. Prove que se $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, então f não é uniformemente contínua.

6. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais, com $n \geq 2$ par e $a_n > 0$. Prove que p assume um mínimo em $\mathbb{R}$, isto é, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $p(x_0) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. Prove que se $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(0) = f(2)$, então $\exists c \in [0, 1]$ t.q. $f(c) = f(c+1)$. **Sugestão:** Considere a função $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

8. Justifique se $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto 0 e se $\forall \alpha > 0$ $f|_{[\alpha, \infty)}$ (restrição de f) é uniformemente contínua em $[\alpha, \infty)$, então f é uniformemente contínua. Exemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em 0 e $f|_{[\alpha, \infty)}$ é de Lipschitz $\forall \alpha > 0$.

9. (i) Uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **contração** se $\exists K$, com $0 < K < 1$ t.q.

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \quad , \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad .$$

Prove que toda contração $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um e um só ponto fixo (isto é, um $x_f \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_f) = x_f$) e que $\forall a \in \mathbb{R}$ a seqüência (x_n) definida recursivamente por $x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, converge para o ponto fixo x_f. **Sugestão:** Prove separadamente a unicidade do ponto fixo (mostre que se y e z forem pontos fixos, então $y = z$). Para $a \in \mathbb{R}$, comece definindo a seqüência (x_n) como acima e mostrando que converge (use o Critério de Cauchy).

(ii) Mostre com um exemplo que se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição abaixo, que é mais fraca do que ser uma contração

$$x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \ ,$$

pode não existir ponto fixo. **Sugestão:** Procure um exemplo da forma $f(x) = x + \varphi(x)$, para uma $\varphi(x)$ conveniente.

10. Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(a) < g(a)$, $f(b) < g(b)$ e que $\exists\, c \in (a,b)$ t.q. $f(c) > g(c)$. Prove que existe o último ponto x antes de c t.q. $f(x) \leq g(x)$, isto é, $\exists\, \alpha \in [a,c)$ t.q. $f(\alpha) = g(\alpha)$ e $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (\alpha, c]$.

11. Sejam I intervalo, $a \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **semicontínua inferiormente** no ponto a se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q.

$$x \in I \quad , \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \; .$$

(i) Prove que são equivalentes:

(A) f é semicontínua inferiormente no ponto a.

(B) $x_n \in I$, $x_n \longrightarrow a \Longrightarrow \underline{\lim}\, f(x_n) \geq f(a)$.

(ii) Dê um exemplo de função que é semicontínua inferiormente mas não contínua em um ponto.

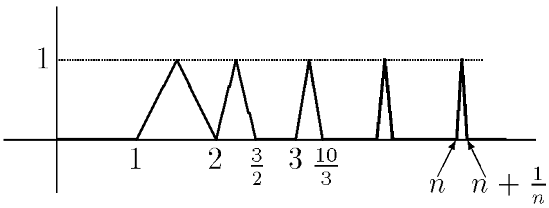
(iii) Prove que se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em (todos os pontos de) $[a,b]$, então f é limitada inferormente e assume um mínimo em $[a,b]$. **Sugestão:** Prove por absurdo.

12. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:

(i) f não é uniformemente contínua;

(ii) $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_n, y_n \in I$, t.q. $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n$.

(ii) Justifique que a função dada pelo gráfico abaixo não é uniformemente contínua.



(iii) Justifique que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ não é uniformemente contínua. **Sugestão:** Faça um esboço do gráfico da função. Tente usar a mesma idéia do item (ii).

13. Sejam α e β fixados com $0 < \alpha < \beta$. Considere a equação

$$\frac{x^2}{\lambda - \alpha} + \frac{y^2}{\lambda - \beta} = 1 \; .$$

Quando λ varia no intervalo (α, β), a equação acima define uma família $\mathcal{F}_h$ de hipérboles. Para $\lambda \in (\beta, +\infty)$ temos uma família $\mathcal{F}_e$ de elipses. *Use o Teorema do Valor Intermediário* para justificar que em cada ponto do plano fora dos eixos, passa uma curva de cada uma destas duas famílias.

Exercícios para serem discutidos nas aulas de exercícios das segundas-feiras às 15:30 h:

Capítulo 7, Funções contínuas, pág. 193, ex. 19, 41