MAT–013 e 318 LISTA 6 Prof. Eduardo

1. Prove que $\dfrac{\cos x}{1}+\dfrac{\cos 3\,x}{3}+\dfrac{\cos 5\,x}{5}+\cdots$ converge, $\forall x\in(0,\pi)$.

2. (i) Seja (x_n) uma seqüência tal que $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$. Pode–se afirmar que (x_n) é de Cauchy? Prove ou dê contra–exemplo. **Sugestão:** Pense em x_n como soma parcial de uma série.

(ii) A mesma pergunta, mas agora com a hipótese de que $\forall p\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$?

3. (i) Prove que se $a_n\to 0$ e (b_n) é limitada, então

$$c_n=\frac{a_1\,b_n+a_2\,b_{n-1}+\cdots+a_n\,b_1}{n}\longrightarrow 0\quad .$$

(ii) Prove que se $a_n\longrightarrow A$ e $b_n\longrightarrow B$, então $c_n\longrightarrow A\,B$. **Sugestão:** Aplique o item (i) para as seqüências $a_n-A\longrightarrow 0$ e $b_n-B\longrightarrow 0$.

4. Sejam $a_n>0$, $\forall n$, com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$. Prove que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n=0$.

5. Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente e se $b_n\longrightarrow 0$, então

$$c_n=a_1\,b_{n-1}+a_2\,b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}\,b_1\longrightarrow 0\ .$$

6. (i) Prove que $\forall x\in[0,1)$ pode ser expresso na forma

$$x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\quad,\qquad \text{com}\quad a_n\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}\quad,\quad \forall n\geq 2\quad .$$

SUGESTÃO: Fixado um x, supondo já escolhidos $a_1,a_2,\ldots,a_n$ descreva como se escolhe a_{n+1}.

OBS. Esta forma de representar um número real foi descoberta por Cantor.

(ii) Mostre que

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots=1\quad,\qquad \frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{n!}\ .$$

(iii) Mostre que, para x irracional, a expansão do item (i) é única.

(iv) Mostre que, para x racional, existem 2 e apenas 2 expansões, $\exists\, n_0$ t.q. uma dela satisfaz $a_n=n-1$, $\forall n\geq n_0$ e a outra satisfaz $a_n=0$, $\forall n\geq n_0$. Por exemplo,

$$\frac{1}{3}=\frac{0}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{0}{4!}+\frac{0}{5!}+\cdots=\frac{0}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots$$

7. Prove a seguinte generalização do exercício anterior:

(i) Fixada $c_n \in \mathbb{N}$, com $c_n \geq 2$ uma seqüência de números naturais, prove que $\forall x \in [0,1)$ $\exists\,(a_n)$, com $a_n \in \{0,1,2,\ldots,c_n-1\}$ e $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_1\, c_2\, \cdots\, c_n}$.

(ii) Mostre que

$$\frac{c_k - 1}{c_k} + \frac{c_{k+1} - 1}{c_k\, c_{k+1}} + \frac{c_{k+2} - 1}{c_k\, c_{k+1}\, c_{k+2}} + \cdots = 1 \quad .$$

Use esta igualdade para estudar a unicidade no item (i). Suponha ainda que $\forall N \;\; \exists\, n$ t.q. N divide $c_1\, c_2 \cdots c_n$ e mostre que $x \in \mathbb{Q} \iff \exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $a_n = 0$.

8. (i) Prove que se $a_n \downarrow 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, então $n\, a_n \longrightarrow 0$. Ou seja, para séries convergentes de termos positivos decrescentes vale uma condição bem mais forte do que $a_n \longrightarrow 0$. **Sugestão:** Olhe para $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2\,n}$ e use o Critério de Cauchy.

(ii) Mostre que a parte (i) pode ser usada para concluir que a série harmônica é divergente.

(iii) Mostre com um exemplo que a conclusão do item (i) não vale se $a_n > 0$ não for monótona. **Sugestão:** Pegue uma série convergente de termos positivos e mexa na ordem de alguns termos, passando-os mais para adiante.

9. (i) Prove o chamado Teste da Condensação de Cauchy: Seja $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ decrescente, $f(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$. Mostre que as séries $\sum f(n)$ e $\sum 2^n f(2^n)$ ou são ambas convergentes ou ambas divergentes. **Sugestão:** Relacione as duas séries acima justificando as desigualdades

$$f(2^n) + f(2^n + 1) + f(2^n + 2) + \cdots + f(2^{n+1} - 1) \leq (2^{n+1} - 2^n)\, f(2^n)$$

$$f(2^n + 1) + f(2^n + 2) + \cdots + f(2^{n+1}) \geq (2^{n+1} - 2^n)\, f(2^{n+1})$$

(ii) Use o item (i) para investigar a convergência (para os diversos valores de k) da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^k}$$

OBS. Pode-se também estudar esta série comparando-a com uma integral.

10. (i) Prove que se $a_n \longrightarrow 0$, então, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n - a_{n+1}\big)$ converge.

(ii) Mostre que se $c_n > 0$, $\forall n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, então $\exists\, E_n \uparrow +\infty$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n\, c_n < \infty$. Segue que não existe uma série convergente de termos postivos $\sum c_n$ universal, que possa ser usada para concluir a convergência de qualquer série convergente de termos positivos por comparação. Mais precisamente, para cada n, seja $r_n = c_n + c_{n+1} + c_{n+2} \cdots$. Então $\sqrt{r_n} \downarrow 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}}$ converge.

11. (i) *Teste de comparação para séries divergentes*: Suponhamos que $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon_0\, d_n \leq a_n$ e suponhamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divirja. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

(ii) Sejam $d_n \geq 0$ com $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergente. Mostre que $\exists\,\varepsilon_n \longrightarrow 0$ t.q. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, d_n$ diverge (isto é, não existe uma série divergente de termos positivos universal, que sirva para estabelecer a divergência de qualquer outra série divergente de termos positivos por comparação). Mais precisamente, para cada n, seja $D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Pondo $\varepsilon_n = \dfrac{1}{D_n}$, mostre que $\lim \varepsilon_n = 0$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{d_n}{D_n}$ diverge.

Sugestão: Como $D_n \uparrow +\infty$, para cada n fixado, $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{D_{n-1}}{D_{n+p}} = 0$ e

$$\frac{d_n}{D_n} + \frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+p}}{D_{n+p}} \geq \frac{d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+p}}{D_{n+p}} = \frac{D_{n+p} - D_{n-1}}{D_{n+p}} = 1 - \frac{D_{n-1}}{D_{n+p}}$$

12. (ex.19 do livro, pg. 123) *Seqüências de variação limitada*: Diz-se que uma seqüência (x_n) é de **variação limitada** se a seqüência $v_n = \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|$ é limitada. Prove que neste caso (v_n) converge. Prove também:

(i) Se (x_n) é de variação limitada, então (x_n) é convergente.

(ii) Se $\exists\,\lambda$ tal que $0 \leq \lambda < 1$ e $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda\,|x_{n+1} - x_n|$, $\forall n$, então (x_n) é de variação limitada.

(ii) Se $x_n = y_n - z_n$, com (y_n) e (z_n) monótonas crescentes, então (x_n) é de variação limitada. **Obs.** A recíproca é verdadeira, mas é mais difícil de provar.

---

13. Seja (a_n) limitada. Prove que

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \overline{\lim}\, a_n\ .$$

14. Prove que $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$ converge $\iff$ $a_n \longrightarrow 0$.

15. Prove que $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots$ converge $\iff$ (a_n) converge.

16. (a) Prove que se

(i) $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$ converge e se

(ii) $a_n \longrightarrow 0$,

então

(iii) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ converge.

(b) Mostre com um contra–exemplo que a condição (i) sozinha não implica (iii).

17. Prove que se $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$ converge, então $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) + \frac{1}{2}(a_3 + a_4) + \cdots$ também converge. Qual a soma da segunda série?

18. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, com $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que a soma da série é o supremo de todas as somas finitas de a_n's.

19. **(i)** Se $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ também converge.

(ii) Mostre com um exemplo que a implicação não vale se os a_n têm sinais quaisquer.

20. Prove que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\,x}{\log_e n}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

21. Sejam $A_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \infty$, $a_n \longrightarrow \alpha$. Mostre que

$$\frac{a_1\,A_1 + a_2\,A_2 + \cdots + a_n\,A_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \longrightarrow \alpha \quad .$$

22. Sejam $a_n > 0$, $\forall n$ t.q. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ e $p_n \uparrow \infty$. Mostre que

$$\frac{p_1\,a_1 + p_2\,a_2 + \cdots + p_n\,a_n}{p_n} \longrightarrow 0 \quad .$$