MAT–318 LISTA 5 Prof. Eduardo

Para ser entregue em aula, dia 04.12.02:

1. Mostre que $a_n \longrightarrow +\infty \implies \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow 0$.

2. Mostre que $a_n \longrightarrow 0 \implies \left|\dfrac{1}{a_n}\right| \longrightarrow +\infty$.

3. Mostre que $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$, $a_n \longrightarrow +\infty \implies b_n \longrightarrow +\infty$.

4. Mostre que $|a_n| \longrightarrow +\infty \implies$ existe uma subseqüência $a_{n_k} \longrightarrow +\infty$ ou existe uma subseqüência $a_{n_k} \longrightarrow -\infty$.

5. Mostre que se a seqüência (a_n) não converge para a, então $\exists c > 0$ e existe uma subseqüência (a_{n_k}) t.q. $|a_{n_k} - a| \geq c$, $\forall n_k$.

6. Mostre que se a seqüência (a_n) não é limitada, então existe uma subseqüência (a_{n_k}) t.q. $|a_{n_k}| \uparrow \infty$.

7. Mostre que se a seqüência (a_n) não é limitada, então existe uma subseqüência (a_{n_k}) t.q. $a_{n_k} \uparrow +\infty$ ou existe uma subseqüência (a_{n_k}) t.q. $a_{n_k} \downarrow -\infty$.

8. Se (a_n) é limitada e não converge para a, prove que existe uma subseqüência (a_{n_k}) e existe $b \neq a$ tais que $a_{n_k} \longrightarrow b$.

9. Seja (a_n) tal que toda subseqüência possui uma subseqüência convergente. Prove que (a_n) é limitada. Mostre com um contra–exemplo que (a_n) não é necessariamente convergente.

10. Se (a_n) é monótona e contém uma subseqüência convergente para a, prove que $a_n \longrightarrow a$.

11. Prove que se (x_n) não possui subseqüência convergente, então $\lim |x_n| = \infty$.

12. Sejam $A \in \mathbb{R}$ e (a_n) uma seqüência tal que toda subseqüência de (a_n) possui uma subseqüência convergente para A. Mostre que $a_n \longrightarrow A$.

---

13. Defina recursivamente uma seqüência (x_n) por

$$x_1 = 1 \quad , \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 1 \, .$$

Prove que (x_n) é monótona limitada e calcule seu limite.

14. Mostre que $\lim n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=\infty$.

Sugestão: $\sqrt[n]{n}=e^{\frac{\log_e n}{n}}$. prove e utilize a desigualdade $e^x>1+x,\ \forall x>0$.

15. Prove que a seqüência

$$1\,,\quad \sqrt{1+\sqrt{1}}\,,\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,,\quad \text{etc}\ldots$$

converge e seu limite é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. A seqüência de Fibonacci (a_n) é definida indutivamente, dizendo que $a_1=a_2=1$ e $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Seja $x_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Prove que:

(i) $a_{n+1}^2-a_n^2-a_n\,a_{n+1}=(-1)^n\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) $x_{n+1}-x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{a_{n+1}\,a_{n+2}}$. **Sugestão:** Segue do anterior.

(iii) $x_1>x_3>x_5>\ldots>x_{2n+1}>x_{2n}>\ldots>x_4>x_2$. **Sugestão:** Verifique antes que $x_{n+1}=f(x_n)$, onde $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

(iv) Justifique que $\exists\, c\in\mathbb{R}$ t.q. $\lim x_n$.

(v) Justifique que c é a raiz positiva da equação $f(x)=x$ e que c é o número áureo

$$c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

17. **(a)** Escreva uma definição recursiva para a seqüência

$$x_1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}\quad,\quad x_2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}\quad,\quad\cdots$$

(b) Mostre que a seqüência (x_n) do item (a) é crescente e converge para $L=\dfrac{-5+\sqrt{45}}{2}$. Em outras palavras

$$\frac{-5+\sqrt{45}}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}$$

(c) Mostre que a seqüência (x_n) satisfaz $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leq\dfrac{|x_{n+1}-x_n|}{36}$.

(d) Obtenha de (c) uma estimativa para $|x_{n+p} - x_n|$ em termos de $|x_2 - x_1|$. **Sugestão:** Inspire-se da demontração do Teorema do Método das paroximações Sucessivas.

(e) Fazendo $p \to +\infty$ na estimativa obtida em (d), obtenha uma estimativa para $|L - x_n|$. Use esta estimativa para determinar n qual x_n aproxima L com erro inferior a 10^{-4}.

18. Dados $K > 0$ e $a_1 > 0$, definimos recursivamente a seqüência (a_n) dizendo que

$$a_{n+1} = \frac{K}{1 + a_n}$$

Prove que (a_n) converge para a raiz positiva da equação $x^2 + x = K$. Observe que, informalmente, podemos dizer que $\lim a_n = \cfrac{K}{1 + \cfrac{K}{1 + \cfrac{K}{1 + \cdots}}}$

19. Dados $0 < a < b$, defina recursivamente uma seqüência (x_n) por

$$x_1 = a \ , \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a + 1}} \ .$$

Prove que $x_n \longrightarrow b$.

20. (a) Se $0 < A < B$, prove que a média geométrica $\sqrt{AB}$ é menor do que a média aritmética $\dfrac{A+B}{2}$.

(b) Dados dois números a e b, com $0 < a < b$, defina recursivamente duas seqüências (a_n) e (b_n) por

$$a_1 = a \quad , \quad b_1 = b \quad , \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}} \quad , \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \ .$$

Prove que estas duas seqüências são limitadas e convergentes, com o mesmo limite. Este limite é chamado de **média aritmético–geométrica** de a e b.

21. Dados $0 < a < b$ reais, defina uma seqüência recursivamente por

$$x_1 = a \ , \quad x_2 = b \ , \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \ .$$

(i) Mostre que $x_1 < x_3 < x_5 < \ldots < x_6 < x_4 < x_2$.

(ii) Prove que $x_{2n-1} \uparrow L_1$, $x_{2n} \downarrow L_2$ e que $L_1 \leq L_2$.

(iii) Prove que $x_{n+2} - x_{n+1} = -\dfrac{x_{n+1} - x_n}{2}$.

(iv) Prove que (x_n) converge (Sugestão: use o Critério de Cauchy).

(v) Justifique que $\lim x_n = \dfrac{a + 2b}{3}$.

22. Sejam (a_n) e (b_n) limitadas.

(i) Prove que $\overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.

(ii) Mostre com um exemplo que pode ocorrer desigualdade estrita.

23. Seja (a_n) uma seqüência limitada. Mostre que $\overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$.

24. Sejam (a_n) e (b_n) limitadas. Prove que se (a_n) e (b_n) são seqüências limitadas de números positivos, então

$$\overline{\lim}\, a_n b_n \leq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$$

e dê um exemplo em que ocorra desigualdade estrita, justificando.

25. Sejam (a_n) e (b_n) limitadas.

(i) Prove que se $a_n + b_n \to c$, então $c \leq \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$.

(ii) Prove que se (a_n) e (b_n) são seqüências limitadas de números positivos, então

$$\overline{\lim}\, a_n b_n \leq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$$

e dê um exemplo em que ocorra desigualdade estrita, justificando.

26. Seja (a_n) uma seqüência t.q. $\exists\, \delta > 0$, $\exists\, M > 0$ t.q $\delta \leq a_n \leq M$, $\forall n$. Prove que

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}$$

27. Seja (x_n) uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Mostre que $\forall x \in [0,1]$ é valor de aderência da seqüência (x_n).

28. Prove que se $a_n < M$, $\forall n$, então $\overline{\lim}\, a_n \leq M$. **Sugestão:** Lembre que o limite superior é um valor de aderência (o maior deles) e, portanto, existe uma subseqüência tendendo para ele.

29. (i) Prove que se $\overline{\lim}\, a_n < \underline{\lim}\, b_n$, então $\exists\, n_0$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, $a_n < b_m$.

(ii) Prove que se $\exists\, n_0$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, $a_n \leq b_m$, então $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$. Vale a implicação com desigualdades estritas? Prove ou dê contra–exemplo.

(iii) Se $a_n < b_n$, $\forall n$, pode-se afirmar que $\overline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$? Justifique. Pode-se afirmar que $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$? Justifique.

Se quiser impressionar o professor, faça os exercícios abaixo:

30. (i) Teorema da Convergência de Cauchy. Prove a seguinte versão discreta da Regra de L'Hôpital: Seja $0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_n \uparrow +\infty$. Se o limite $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n}$ existe, então o limite $\lim \dfrac{a_n}{A_n}$ também existe e os dois são iguais.

Sugestão: Note que uma desigualdade $\left|\dfrac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} - L\right| < \varepsilon$ pode ser reescrita como

$$\big(L - \varepsilon\big)\big(A_{n+1} - A_n\big) < |a_{n+1} - a_n| < \big(L + \varepsilon\big)\big(A_{n+1} - A_n\big) \ .$$

(ii) Use o item (i) para mostrar que

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} = 1 \ .$$

31. Prove a seguinte versão da Regra de L'Hôpital devida a Cesàro: Se $a_n \to 0$ e $b_n \downarrow 0$ (estritamente decrescente) e se $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \gamma$, então $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \gamma$.

32. Mostre que se o conjunto dos termos de uma seqüência não tem maior nem menor elemento, então a seqüência diverge.

33. Definição: Um subconjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ é dito um **grupo aditivo** se

(1) $0 \in G$

(2) $x, y \in G \Longrightarrow x + y \in G$

(3) $x \in G \Longrightarrow -x \in G$

Por exemplo, $\mathbb{Z}$, $\{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são grupos aditivos.

Sejam $G \subseteq \mathbb{R}$ um grupo aditivo, $G^+ = \{x \in g \mid x > 0\}$ e $a = \inf G^+$.

(i) Prove que se $a > 0$, então $G = \{0, a, -a, 2\,a, -2\,a, 3\,a, -3\,a, \ldots\}$.

(ii) Prove que se $a = 0$, então G é denso.

(iii) Prove que se α é um número irracional, então $G = \{m + n\,\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo aditivo denso.

(iv) Use o resultado do item (iii), com $\alpha = 2\,\pi$, para provar que o conjunto dos valores de aderência da seqüência $(\cos n)$ é todo o intervalo $[-1, 1]$.