MAT–318 LISTA 2 Prof. Eduardo

Se quiser ter **um** exercício corrigido, sem valer nota, entregue-o até dia 10.11.02

NOTAÇÃO: Denotamos por (a_n) a seqüência (lista infinita)

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ a_5 \ , \cdots\cdots$$

Verifique se são enumeráveis ou não, justificando sua resposta:

1. O conjunto de todas as seqüências formadas de 0's e 1's, possuindo exatamente 3 1's.

2. Para um $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{M}_k$ de todas as seqüências formadas de 0's e 1's, possuindo no máximo k termos iguais a 1.

3. $\mathcal{A} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad a_n = 0 \ \text{ exceto para um número finito de } n\text{'s} \ \}$.

4. O conjunto de todas as seqüências formadas de 0's e 1's.

5. O conjunto $\mathcal{C}$ de todos os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que são vértice de algum polígono regular inscrito na circunferência e que tenha $(1, 0)$ como um de seus vértices.

6. $\mathcal{B} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_n \in \mathbb{N} \quad , \quad a_n \geq a_{n+1} \ \}$

7. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

8. $\mathcal{P} = \{(a_n) \mid \ a_n \text{ é número primo } \forall n \ \}$

9. $\mathcal{G} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_n \in \mathbb{N} \quad , \quad a_n \leq a_{n+1} \ \}$

10. $\mathcal{J} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_n \in \mathbb{N} \ , \quad n \leq a_n \leq 2\,n\}$

11. $\mathcal{D} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_{n+1} \text{ é múltiplo de } a_n\}$

12. $\mathcal{E} = \{(a_n) \mid \ \forall n \ , \ a_{n+1} \text{ é um divisor de } a_n\}$ (OBS: é equivalente a dizer que a_n é múltiplo de a_{n+1}).

12. O conjunto de todas as seqüências formadas de 0's e 1's, contendo uma infinidade de 0's e uma infinidade de 1's.

13. O conjunto de todas as séries de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ com coeficientes $a_n \in \mathbb{Z}$.

14. (i) Suponhamos que um elemento $x \in [0, 1)$ possua duas expansões decimais diferentes

$$x = 0.a_1a_2a_3 \ldots = 0.b_1b_2b_3 \ldots \ .$$

Seja n_0 o menor índice n tal que $a_n \neq b_n$. Então $a_{n_0} < b_{n_0}$ ou $a_{n_0} > b_{n_0}$. Podemos, sem perda de generalidade, trocando os símbolos, se necessário, supor que $a_{n_0} < b_{n_0}$. Prove que as duas expansões acima são

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{n_0}999\dots \qquad \text{e} \qquad x = 0.a_1a_2\dots(a_{n_0}{+}1)000\dots$$

(ii) Prove que o conjunto dos elementos de $[0,1)$ cuja expansão decimal não é única é enumerável.

15. Sejam A e B conjuntos infinitos não enumeráveis. Suponha que exista uma aplicação sobrejetiva $\varphi : A \longrightarrow B$ que não seja injetiva, mas para qual exista um subconjunto **enumerável** infinito $E \subseteq A$ tal que a restrição $\varphi\Big|_{(A\setminus E)} : A \setminus E \longrightarrow B$ de φ ao conjunto diferença $A \setminus E$ seja bijetiva. Isto é estamos supondo que φ é tal que ao retirarmos de seu domínio um conjunto infinito enumerável E conveniente a função resultante passe a ser injetiva, sem deixar de ser sobrejetiva.

Prove que existe uma aplicação $\psi : A \longrightarrow B$ bijetiva. **Sugestão:** Tomando $F \subseteq A$ um outro subconjunto infinito enumerável tal que $E \cap F = \emptyset$, suponhamos $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ e $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$. Construa ψ pondo $\psi(x) = \varphi(x)$, se $x \in A \setminus (E \cup F)$. Construa uma bijeção $\alpha : E \cup F \longrightarrow F$ e defina $\psi(x) = \varphi\big(\alpha(x)\big)$, se $x \in E \cup F$. Prove que ψ definida deste modo é uma bijeção de A sobre B.

16. O objetivo deste exercício é mostrar que existe uma bijeção entre um quadrado e um segmento. Vamos construir primeiro uma aplicação sobrejetiva

$$\varphi : [0,1) \longrightarrow [0,1) \times [0,1)\ .$$

Dado $t \in [0,1)$, tomemos a expansão decimal de $t = 0.c_1c_2c_3\dots$, convencionando que no caso de t ter duas expansões decimais diferentes consideramos aquela que a partir de certo ponto é $000\dots$. Definimos $\varphi(t) = (x,y)$ onde $x, y \in [0,1)$ são dados pelas expansões decimais

$$x = 0.c_1c_3c_5\dots \qquad \text{e} \qquad y = 0.c_2c_4c_6\dots$$

Note que uma destas expansões de x ou de y (mas não as duas) pode a partir de certo ponto ser constante igual a $999\dots$.

Prove de φ assim definida é sobrejetiva.

Mostre que φ não é injetiva, dando exemplo de $t \neq t'$ tais que $\varphi(t) = \varphi(t')$.

Prove que dado $t \in [0,1)$, existem no máximo 2 outros pontos $t_1, t_2 \in [0,1)$ tais que $\varphi(t) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ e que isto só pode acontecer para uma quantidade enumerável de t's. Combine isto com o exercício 15 para provar que existe uma bijeção

$$\psi : [0,1) \longrightarrow [0,1) \times [0,1)\ .$$