MAT–013 e 318 LISTA 12 Prof. Eduardo

Para serem entregues em aula dia 28.01.03 *impreterivelmente*.

**1. (i)** Justifique que

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2\,b}-\frac{1}{a+3\,b}+\cdots=\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt\ , \qquad \text{para} \quad a\geq 1,\ b>0\ \ .$$

**Sugestão:** Primeiro integre entre 0 e $x$ ($0<x<1$), utilizando a série geométrica. Discuta depois o que acontece quando $x\longrightarrow 1^-$.

**(ii)** Obtenha daí que

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2\right)\quad .$$

**2.** A partir dos desenvolvimentos de $\log(1+x)$ e de $\log(1-x)$ obtenha

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)\quad , \quad \forall x\in(-1,1)\ \ .$$

Usando os 3 primeiros termos e dando um valor conveniente para $x$, encontre um valor aproximado para $\log 2$, dando uma estimativa razoável para o erro. Se usasse

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

quantos termos precisaria usar para obter uma aproximação com ordem de precisão semelhante?

**3. (i)** Mostre que $\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}$ . **Sugestão:** Chama de $\alpha=\arctan\frac{1}{2}$ e $\beta=\arctan\frac{1}{3}$ e use que $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$.

**(ii)** Usando a expansão em série de potências da função $\arctan x$ , deduza que

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\cdots\right)$$

Dê uma estimativa para o número de termos de se deve pegar em cada série para ter uma aproximação com 3 casa corretas?

**(iii)** A mesma pergunta para

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

**4. (i)** Mostre que

$$\frac{\pi}{4}=4\ \arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\quad .$$

**Sugestão:** Seja $\alpha = \arctan \dfrac{1}{5}$ . Mostre que

$$\tan\alpha = \frac{1}{5} \quad , \quad \tan 2\,\alpha = \frac{5}{12} \quad , \quad \tan 4\,\alpha = \frac{120}{119} \quad , \quad \tan\Big(4\,\alpha - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{239}$$

**(ii)** Use o resultado do item (i) para obter uma série representando $\pi$ semelhante a do exercício anterior, mas convergindo ainda mais rapidamente.

**4.** Prove que uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em todo $\mathbb{R}$ se e somente se $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ , $\forall n \geq N$ , isto é, a série de potênciais é um polinômio.

**5.** O objetivo deste exercício é construir uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivável, cuja série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ tem raio de convergência 0, isto é, converge somente para $x = 0$ .

**(b)** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x$ . Mostre que a série que define $f$, bem como a séries dela obtidas por derivação termo a termo um número arbitrário de vezes, convergem uniformemente em $\mathbb{R}$. Conclua que $f \in C^{\infty}$ .

**(c)** Prove que

$$f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\big(n^2\big)^{2k}(-1)^k \ .$$

**(d)** Prove que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\, x^{2k}$ diverge se $x \neq 0$ . **Sugestão:**

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\right| \geq \frac{e^{-2k}(2k)^{4k}x^{2k}}{\big(2k\big)^{2k}} = \Big(\frac{2kx}{e}\Big)^{2k} \longrightarrow +\infty, \text{ quando } k \longrightarrow +\infty \text{ com } x \neq 0 \text{ fixo.}$$

**6.** Obtenha o valor da soma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \, .$$

Sugestão: Considere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

**7.** **(a)** Multiplique as expressões em séries de potência de $\dfrac{1}{1-x}$ e de $\ln(1-x)$ e, por integração, obtenha

$$\frac{1}{2}\Big(\ln(1-x)\Big)^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{2}\Big)x^3 + \frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)x^5 + \cdots$$

**(b)** Justifique que o resultdo continua válido para $x = -1$ . OBS: Comparando com uma integral, temos $\ln n < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \ln(n-1)$ .

**8.** Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\,dx$. Use o desenvolvimento em série de potências de $-\ln(1-x)$. Verifique que a singularidade do integrando em $0$ é removível. A integral deve ser interpretada como uma integral imprópria $\displaystyle\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\,dx$, pois o integrando se torna infinito quado $x\to 1^-$.

**9. (i)** Prove que

$$\int_0^t \Big(-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}\Big)dx = \frac{t}{1{\cdot}2}+\frac{t^2}{2{\cdot}3}+\frac{t^3}{3{\cdot}4}+\cdots, \qquad |t|<1\,.$$

Obs: A integral acima é própria, pois a singularidade do integrando em $0$ é removível.

**(b)** Prove que $\displaystyle\int_0^1 \Big(-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}\Big)dx = 1$. A integral deve ser entendidada como uma integral imprópria $\displaystyle\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \Big(-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}\Big)dx$. **Sug:** Para calcular a soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, decomponha $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}$ em frações parciais.

**10.** O objetivo deste exercício é obter o valor da Integral de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Note que $\displaystyle\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$ não tem singularidade em $x=0$.

**(i)** Defina $I_n : [0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\displaystyle I_n(y)=\int_0^{n\pi}\frac{e^{-xy}\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Mostre que $(I_n)$ converge uniformemente em $[0,+\infty)$ para uma função $I$, denotada pela integral imprópria $\displaystyle I(y)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xy}\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

**(ii)** Justifique que $\displaystyle I_n'(y) = -\int_0^{n\pi} e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx$ e que $(I_n')$ converge uniformemente em $[\alpha,+\infty)$, $\forall\alpha>0$. Mostre que $I$ é conínua em $[0,+\infty)$ e derivável em $(0,+\infty)$ com $\displaystyle I'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx$

**(iii)** Esta última integral pode ser calculada como $\displaystyle\int e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx = \Im\Big(\int e^{-xy}e^{i\,x}\,dx\Big) = \Im\Big(e^{(-y+i)\,x}\,dx\Big)$, onde $\Im$ indica a parte imaginária. Mostre que $\displaystyle I'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, $\forall y\in(0,+\infty)$.

**(iv)** Conclua que $I(y) = -\arctan y + C$. Fazendo o limite para $y\to+\infty$, mostre que $C=\dfrac{\pi}{2}$. Finalmente, para $y=0$, obtenha $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

**11.** A partir dos desenvolvimentos em séries de potências de $\ln(1+x)$ e de $\ln(1-x)$ obtenha

$$\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = 2\Big(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\Big)\,, \qquad \forall x\in(-1,1)\,.$$

Usando os 3 primeiros termos e dando um valor conveniente para $x$, encontre um valor aproximado para $\ln 2$, dando uma estimativa razoável para o erro. Se usasse $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$, dê uma estimativa de quantos termos seria necessário coniderar para obter uma aproximação tão boa.

**12.** Prove que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right)$$

$\forall k \in (0,1)$.

**13. (i)** Prove que a seguinte versão para convergência uniforme do Teste de Dirichlet: Sejam $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas seqüências de funções satisfazendo:

**(i)** $\exists M \geq 0$ t.q. $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall x \in I$ ;

**(ii)** $0 \leq v_{n+1} \leq v_n(x)$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall x \in I$ ;

**(iii)** $v_n \longrightarrow 0$ uniformemente.

Então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ converge uniformemente.

**(ii)** Use o item anterior para provar que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ converge uniformemente em $[\alpha, +\infty)$, $\forall \alpha > 0$ .

**14. (i)** Prove a seguinte extensão do Teorema de Abel: Seja $v_n : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seqüência de funções tal que

**(i)** $0 \leq v_{n+1} \leq v_n(x)$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall x \in [0,1)$ ;

**(ii)** $\lim_{x\to 1^-} v_n(x) = 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Obs: O Teorema de Abel corresponde ao caso particular $v_n(x) = x^n$.

**(ii)** Use o item anterior para provar que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n\big(1+x^n\big)} = \frac{1}{2}\ln 2 = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n\big(1-x\big)}{1-x^{2n}}$$