MAT–013 e 318 LISTA 10 Prof. Eduardo

Para serem entregues em aula dia 17.01.03 *impreterivelmente*.

1. Relacionando a uma integral conveniente, prove que:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+j^2} = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2\,n} \right) = \ln 2$

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{k\,n} \right) = \ln k\,,\ \ \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \text{com}\ \ k \geq 2\,.$

2. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, então f é constante igual a 0. Mostre com um exemplo que se f fosse apenas integrável a implicação não valeria.

3. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável t.q. $f(0) = 2$ e $|f'(x)| \leq 1$, $\forall x$. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f \geq \frac{3}{2}$. Prove rigorosamente.

4. $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **função escada** se existir uma partição $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ tal que φ é constante em cada intervalo (t_{i-1}, t_i). Suponhamos que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seja limitada e $f \geq 0$. Prove que $\underline{\int}_a^b f = \sup\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \text{ é função escada, } 0 \leq \varphi \leq f\}$. Usando este resultado, prove que vale um fato análogo, substituindo a condição "φ função escada" por "φ função contínua". **Sugestão:** Aproxime uma função escada por uma função contínua, de modo que as duas coincidam, exceto em "pequenos" intervalos.

5. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e periódica de período P, isto é, se $f(x+P) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então o valor de

$$\int_x^{x+P} f(t)\,dt$$

não depende de x.

6. Prove que se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e periódica de período P, então o gráfico de f admite cordas de quaisquer comprimentos, ou seja, $\forall a > 0$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x+a) = f(x)$. Mais precisamente, dado $a > 0$, existem pelo menos 2 valores distintos de x em $[0,P)$ para os quais $f(x+a) = f(x)$. **Sugestão:** Pelo exercício 1,

$$\int_0^P \big[f(x+a) - f(x)\big]dx = 0\,, \quad \forall a > 0\,.$$

Portanto se o integrando não é constante igual a 0, troca de sinal. Se troca de sinal, pelo fato de f ser periódica, deve trocar duas vezes, a menos que se anule para $x = 0$.

7. **(i)** Sejam I e J intervalos, seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e seja $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, crescente e tal que $f(I) \subseteq J$. Prove que $g \circ f$ é convexa.

(ii) Dizemos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é **log–convexa** se $f(x) > 0$, $\forall x \in I$ e se $\ln f(x)$ é uma função convexa. Use o item (i) para mostrar que se f é log–convexa, então f é convexa. Dê um exemplo de função convexa que não seja log–convexa.

(iii) Prove que $f > 0$ é log–convexa $\iff$ $f(\alpha\, x + \beta\, y) \leq f(x)^{\alpha}\, g(x)^{\beta}$, para $\alpha, \beta > 0$, com $\alpha + \beta = 1$.

(iv) Prove que se $f > 0$ é 2 vezes derivável, $f > 0$ é log–convexa $\iff$ $(f')^2 \leq f\, f''$.

(v) Usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz para integrais
$\left(\int_a^b |f\,g| \leq \left(\int_a^b |f|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g|\right)^{\frac{1}{2}} ,\ -\infty \leq a < b \leq +\infty \right)$ e admitindo que se pode derivar sob o sinal de integral, use (vi) para provar que a Função Gama, $\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ é log–convexa.

8. **(i)** Dada $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente, defina $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = A + \displaystyle\int_a^x g$. Prove que f é convexa.

(ii) No item anterior mostre que se x_0 é um ponto de descontinuidade de g, então f não é derivável em x_0.

(iii) Construa uma função convexa em um intervalo, que não tenha derivada em nenhum racional.

9. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Prove que f é convexa $\Longrightarrow$ $\forall s, t$ com $a \leq s < t \leq b$, vale $\displaystyle\frac{1}{t-s}\int_s^t f \leq \frac{f(s) + f(t)}{2}$. Interprete geomericamente. **Sugestão:** Prove que

$$f(x) \leq f(s) + \big(f(t) - f(s)\big)\frac{x - s}{t - s}\,, \qquad \forall x \in [s, t]\,.$$

10. Justifique que $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} \frac{n\,\pi\,x}{N} = \frac{1 - \cos \pi\, x}{\pi\, x}$.

11. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Mostre que se $f(a) = f(b) = 0$ e se $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, então $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \frac{M\,(b-a)^2}{4}$.

12. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Suponhamos que

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^x f \quad , \quad \forall x \in [a, b]\ .$$

Mostre que $f \equiv 0$. **Sugestão:** Seja $M = \displaystyle\int_a^b f$.

$$0 \leq f \leq M \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq M\,(x - a) \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{M\,(x-a)^2}{2!} \quad \ldots \text{ etc.}$$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M\,(x-a)^n}{n!} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

Para x fixo, faz $n \longrightarrow \infty$.

13. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad .$$

Sugestão: Seja $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f|$. Mostre que dado $\varepsilon_1 > 0$ existe um intervalo $[c, d] \subseteq (a, b]$ t.q. $|f(x)| \geq M - \varepsilon_1$, $\forall x \in [c, d]$. Mostre que

$$(M - \varepsilon_1)\big(d - c\big)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M\big(b - a\big)^{\frac{1}{p}}$$