O potencial magnético vetorial $\vec{A}$: o significado do divergente do rotacional.

a) Caso estático $\left(\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0 \ , \ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0\right)$:

O cálculo dos campos elétricos fica bastante simplificado nos casos em que $\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$, pois associamos ao campo $\vec{E}$ uma função potencial φ tal que $\vec{E}=\nabla\varphi$. Usamos , neste caso, a fórmula 8 da Tabela do operador Del que afirma que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é nulo.

Já para campos de indução magnética $\vec{B}$, o rotacional de $\vec{B}$ não se anula, isto é, $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$. Contudo o divergente de $\vec{B}$ se anula , isto é , $\nabla\bullet\vec{B}=0$, cujo significado físico à luz da Lei de Gauss do Magnetismo é que não há cargas magnéticas na natureza.

Vamos usar, agora, a fórmula 9 da Tabela do operador Del que afirma que o divergente do rotacional é nulo. Então, associamos ao campo magnético $\vec{B}$ um potencial magnético vetorial $\vec{A}$, tal que $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. A única condição que se impõe é que a lei de Ampère na forma diferencial $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ seja satisfeita.

Assim $\quad \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu_0\vec{J}$

Usando a TAB(10) , temos

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

Especificando $\nabla\bullet\vec{A}=0$ (calibre de Coulomb), obtemos a equação diferencial conhecida como equação vetorial de Poisson

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

cuja solução depende da simetria do problema e é baseada em métodos de expansões multipolares . Uma vez determinado $\vec{A}$, conheceremos $\vec{B}$ que é o rotacional de $\vec{A}$.

b) Campos não estáticos: $\left(\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\neq 0 \ , \ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\neq 0 \ , \ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\neq 0\right)$

Outra grande utilidade para o potencial magnético vetorial $\vec{A}$ é nos problemas que tratam da radiação eletromagnética, quando então,os campos vetoriais e escalares devem ser função do tempo. Diferentemente do caso estático, onde $\nabla\bullet\vec{J}=0$, pois $\mu_0\vec{J}=\nabla\times\vec{B}$ (divergente do rotacional é nulo), no caso de campos variáveis no tempo a equação da continuidade que expressa a conservação de carga , como sabemos, é dada por

$$\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\ .$$

Portanto, deverá haver uma correção na equação que expressa a Lei de Ampère na forma vetorial ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$). Esta correção foi a grande contribuição de Maxwell .
Como fez Maxwell para conciliar a lei de Ampére com a conservação de carga?
Partiu da lei de Gauss $\nabla \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, derivou ambos os lados com relação a t , obtendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \bullet \vec{E}\right) = \varepsilon_0 \nabla \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Logo, pela equação da continuidade,

$$\nabla \bullet \vec{J} + \varepsilon_0 \nabla \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \bullet \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Isto é, a lei de Ampère , neste caso, deverá ser corrigida substituindo o campo $\vec{J} \to \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Assim, $$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \to \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Com esta correção, a lei de Ampère original passou se chamar lei de Ampère-Maxwell e é a 4ª equação do conjunto conhecido como Equações de Maxwell, que unifica a ótica e o eletromagnetismo.
A equação para o potencial magnético vetorial , que no caso estático é $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ fica

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

EXERCÍCIO: Mostre que a derivada $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$ e, conseqüentemente a equação diferencial para o vetor potencial é

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Conclusão: O potencial magnético vetorial é uma ferramenta de cálculo poderosa e elegante para a solução de problemas de campos eletromagnéticos, particularmente aqueles relacionados com antenas. Nestes casos, resolve-se a equação diferencial para $\vec{A}$ e após encontra-se $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.