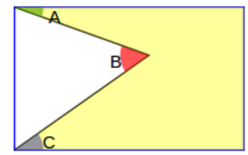
Nível 1

Problema 1 -



Desenhado um retângulo, escolhemos um ponto em seu interior e o unimos a dois vértices adjacentes, como na figura. Pede-se determinar uma relação entre as medidas dos ângulos A, B, e C mostrados nessa figura.

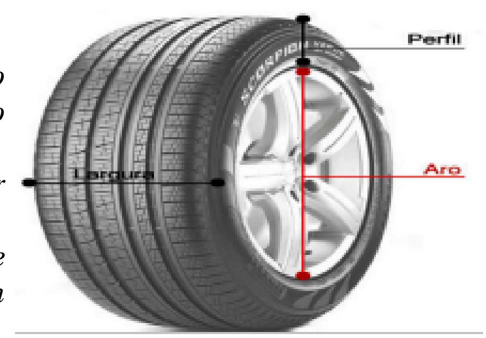
Resp.
Usando a que a soma das medidas de um triângulo vale 180 graus:
$(90° - A) + (90° - C) + B = 180°$, logo $B = A + C$.

Problema 2 -

Ana fez dois copos de limonada. No primeiro, colocou 200 ml de suco de limão e 300 ml de água. No segundo copo, colocou 100 ml de suco de limão e 200 ml de água. Qual dos copos tem gosto mais forte de limão? Justifique sua resposta.

Resp.
Precisamos comparar as razões entre o volume de limão e o volume total da mistura nos dois copos, expressando-as usando uma *mesma* quantidade de mistura.
Para o primeiro copo: $200/500 = 0.40$, e no segundo copo: $100/300 = 0.33$. Logo no primeiro copo há 0.40 ml de limão para cada um ml da mistura, e no segundo 0.33 ml de limão também para um ml da mistura. Assim, o gosto mais forte é o do primeiro copo.

Problema 3 -



No sistema americano, os pneus de automóveis são especificados pelo diâmetro (a altura do pneu), a largura da banda de rodagem e pelo aro, todos medidos em polegadas.
No sistema europeu se dá a largura da banda em milímetros, o valor percentual da razão perfil/largura, e o aro em polegadas.
Tenho um pneu americano com os dados: 32 x 11,5 x 15. Determine o pneu europeu mais próximo a esse e cujos dados são expressos em números inteiros. (Se precisar, use que 1 polegada = 25,4 mm.)

Resp.
O crucial é determinar o valor do perfil do pneu. Para isso, observar que diâmetro = perfil + aro + perfil, de modo que perfil = (diâmetro - aro)/2, logo: perfil = $(32 - 15)/2$ = 8.5 polegadas. Com o perfil, temos para a razão perfil/largura = $8.5/11.5 = 0.739 \simeq 74\%$. A largura da banda é 11.5 x 25.4 = 292 mm. Resumindo, o pneu europeu mais próximo tem: 292 mm, 74 %, 15 polegadas.

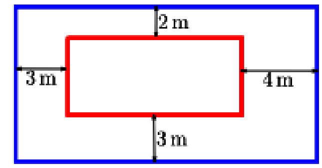
Problema 4 -

Calcule frações ordinárias $\frac{1}{m}$ *e* $\frac{1}{n}$ *que verificam:* $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{59}{70}$. *Existem outras?*

Resp.
Temos $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{59}{70} - \frac{35}{70} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$ e então $\frac{m+n}{mn} = \frac{12}{35}$. Como esta fração é irredutível, 35 é o mmc de m e n, e como a fatoração prima de 35 é 5×7 e a soma de m e n vale 12, fica fácil vermos que há exatamente duas respostas: $m = 5, n = 7$ e $m = 5, n = 7$.

Problema 5 -

A figura mostra dois retângulos de lados paralelos. Pede-se calcular o valor da diferença de seus perímetros.



Resp.
$L = \ell + 7$, $H = h + 5$, de modo que $L + H = \ell + h + 12$, logo $2(L + h) = 2(\ell + h) + 24$, ou seja $P = p + 24$, e finalmente: $P - p = 24$.

Problema 6 -

Um cálculo direto mostra que existem números inteiros positivos n tais que n e 3^n têm o mesmo dígito na casa das unidades. Exemplos: $n = 7$ (pois $3^7 = 2187$), e $n = 13$ (pois $3^{13} = 1594323$).
Se escrevermos ordenadamente esses inteiros ficaremos com uma sequência que inicia com: $7, 13, 27, 33, 47, 53, 67, 73,$ etc. Pede-se o milésimo número dessa sequência.
Resp.
Procurando um padrão na sequência desses números, a observação cuidadosa nos mostra que, se $k = 2, 4, 6, \ldots$ for par, o número que estará na k-ésima posição da sequência vale $n = 13 + (\frac{k}{2} - 1) \times 20$.
Logo, o número na milésima posição dessa sequência é $n = 13 + (500 - 1) \times 20 = 9993$.

Problema 7 -

Se a base de um retângulo for aumentada de 10%, de que percentual devemos diminuir a altura desse retângulo para que o valor de sua área não mude? Justifique sua resposta.
Resp.
Indicando por b, h as medidas do retângulo inicial e B, H as do aumentado, como queremos ter $b\,h = B\,H = 1{,}10\,b\,H$, segue $1{,}10H = h$, logo $H = h/1{,}10 = 0{,}909\,h$.
Conclusão: a nova altura será $90{,}9\%$ da original, ou seja haverá diminuição de $9{,}1\%$ da altura.

Problema 8 -

Se Ana escrever três dígitos, Beto constrói um número de 6 dígitos repetindo os três dígitos de Ana na mesma ordem. Por exemplo, 594594, 728728, etc. Pede-se provar que, quaisquer que sejam os 3 dígitos escolhidos por Ana, o número de Beto sempre será divisível por 7, 11 e 13.
Resp.
Usando a definição de sistema de numeração decimal:
$abc \to abcabc = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100100a + 10010b + 1001c,$
de modo que
$abcabc = 1001(100a + 10b + c) = 7 \times 11 \times 13\,(100a + 10b + c).$