Nível 1

Problema 1 -

Ana nasceu em 1997 e sua irmã Beth nasceu em 2001, mas não sabemos os dias de aniversário delas. Pede-se calcular qual pode ser a menor diferença de idade (em anos e dias) delas e qual pode ser a maior diferença de idade (em anos e dias) entre elas.

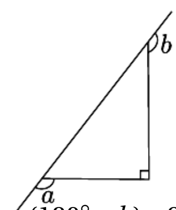
Resp.:

Menor diferença: Ana 31dez/1997 e Beth 01jan/2001, o que dá 3 anos e 1 dia. Maior diferença: Ana 01jan/1997 e Beth 31dez/2001, o que dá uma diferença de 5 anos e 1 dia.

OBS: não é preciso saber se um ano é bissexto, ou não.

Problema 2 -

Determine o valor da soma $a+b$ *das medidas em graus dos ângulos* a, b *da figura ao lado.*



Resp.:

A soma dos ângulos de um triângulo é 180 graus, então: $(180° - a) + (180° - b) + 90° = 180°$, de modo que $a + b = 270°$.

Problema 3 -

A torcida assistindo um certo jogo de futebol é composta de pais e filhos. Sabe-se que um sexto dessa torcida é composta de filhos e que dois quintos dos pais são homens. Pede-se determinar a fração da torcida correspondendo às mães.

Resp.:

Indiquemos por t, f, m, h, nesta ordem, o número de torcedores, o de filhos, o de mães e o dos pais homens. Temos $h = \frac{2}{5}(m+h)$, de modo que $\frac{3}{5}h = \frac{2}{5}m$. Então $t = f + m + h = \frac{1}{6}t + m + \frac{2}{3}m$, de onde tiramos que $\frac{5}{6}t = \frac{5}{3}m$, logo: $m = \frac{3}{6}t = \frac{1}{2}t$. Conclusão: as mães são a metade dessa torcida.

Problema 4 -

Uma revenda vendeu um primeiro carro por 40% *a mais do que pagou por ele, e vendeu um segundo por* 60% *a mais do que tinha pago por este. Sendo que o lucro* total *dessa venda foi* 54%, *pede-se a razão entre o preço que ela* pagou *pelo primeiro e o preço que* pagou *pelo segundo.*

Resp.:

Indiquemos por a, b os preços de compra desses carros, e por a', b' os preços de venda deles. Foi dado que $a' + b' = 1.4a + 1.6b$ e que $a' + b' = 1.54(a+b)$, de modo que $1.4a + 1.6b = 1.54a + 1.54b$. Então: $0.06b = 0.14a$, de modo que $a/b = 0.06/0.14 = 3/7$, ou aproximadament 42.86%.

Problema 5 -

Determinar todas *as maneiras de se retirar uma ou mais frações da soma seguinte de modo que as frações que ficarem tenham soma igual a um:*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}.$$

Resp.:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12} = \frac{60+40+30+20+15+12+10}{120}.$$

Então precisamos descobrir todas as maneiras de tirarmos uma ou mais parcelas do numerador de modo que a soma resultante seja 120. Ora, é imediato que obrigatoriamente temos de tirar 15 e 12, pois qualquer uma delas impedirá soma 120. Resta descobrir que outras parcelas podemos retirar. Iniciamos examinando se é possível retirar apenas uma única parcela de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma soma 120. Testando, vemos que é só retirando a 40 obtemos os 120.

Examinemos agora se é possível retirar apenas mais duas parcelas, além de 15 e 12. Ou seja, examinemos se é possível retirar apenas duas parcelas de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma

soma 120. Tentando todas as possibilidades é imediato vermos que isso só ocorre retirando 30 e 10, o que dá $60+40+20=120$.
Examinemos agora se é possível retirar apenas mais três parcelas, além de 15 e 12. Ou seja, examinemos se é possível retirar apenas três parcelas de $60+40+30+20+10$ de modo obtermos uma soma 120. Ora, ficariam apenas duas dessas parcelas, e é imediato que é impossível essas duas somar 120. Mais impossível ainda é retirando 4 ou mais parcelas. Conclusão: as soluções desta problema são

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1, \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Problema 6 -

Calcular o número inteiro que é o resultado da soma: $2018+2019+2020+\cdots+2068$*, as parcelas da qual são todos os números inteiros de 2018 até 2068.*
Resp.:
$2018+2019+2020+\cdots+2068=51\times2000+(18+19+20+\cdots+68)=$
$51\times2000+(17+1)+(17+2)+(17+3)+\cdots+(17+51)=51\times2000+51\times17+(1+2+3+\cdots+51)=$
$51\times2017+\frac{51\times52}{2}=51\times2017+51\times26=51\times2043=104\,193.$

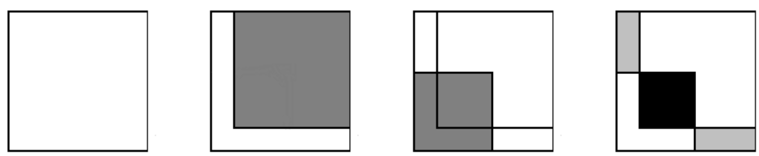
Problema 7 -

Um número inteiro é dito ser azarado *se ele for igual a 13 vezes a soma de seus algarismos. Por exemplo, 117 é azarado pois* $117=13\times(1+1+7)$*. Os inteiros com até 4 algarismos têm a forma:* $a, ab, abc, abcd$*. Quais deles são azarados?*
Resp.:
– Existem azarados de um algarismo?
Precisamos ter $a=13\times a$, o que somente ocorre com $a=0$.
– Existem azarados de dois algarismos?
Precisamos ter $10a+b=13\times(a+b)$, logo $0=3a+12b$, evidentemente impossível.
– Existem azarados de três algarismos?
Precisamos ter $100a+10b+c=13\times(a+b+c)$, logo $87a=3b+12c$, ou $12c=87a-3b$. Observamos que o termo $12c$ sempre será par, de modo que somos obrigados a ter $87a-3b$ também par.
Iniciemos examinando o que ocorre com $a=1$. Ora, em $12c=87-3b$, o membro da direita tem de ser par, o que deixa-nos para examinar as possibilidades $b=1,3,5,9$. Ora, $b=1$ dá $12c=84$, logo $c=7$. Por sua vez, $b=3$ dá $12c=78$, uma impossibilidade. Tomando $b=5$, ficamos com $12c=72$, logo $c=6$. Agora, $b=5$ dá $12c=66$, outra impossibilidade. Finalmente, $b=9$ dá $12c=60$, logo $c=5$.
Resumindo, os azarados com três algarismos e com $a=1$ são: 117, 156, 195.
Examinemos a possibilidade de algarismo inicial $a=2$.
Agora, precisamos ter $12c=174-3b$, e assim só haverá possibilidade de azarado com $b=2,4,6,8$. Ora, $b=2$ dá $12c=168$, que daria $c=14$ uma impossibilidade para um algarismo. Por sua vez, $b=4$ dá $12c=174-12=162$, outra impossibilidade pois o valor máximo que podemos ter para $12c$ é 108. O caso $b=6$ daria $12c=174-18>108$, e o caso $b=8$ daria $12c=174-24>108$, mais outras impossibilidades.
Resumindo, não existe azarado com três algarimos o inicial dos quais é $a=2$.
Examinemos as possibilidades de algarismo inicial $a\geqslant3$.
Novamente, exploramos que $12c\leqslant108$, e que agora $87a\geqslant261$, de modo que nunca poderá ocorrer $12c=87a-3b$, pois o maior valor que $3b$ pode subtrair de $87a$ é $3b=27$, e $261-27>108$.
Concluindo, os únicos azarados de três algarimos são: 117, 156, 195.

– Existem azarados com quatro algarismos?
Agora, ao contrário do que poderíamos esperar a partir do caso anterior, temos uma situação mais rápida de resolver. Com efeito, agora precisamos ter: $1000a+100b+10c+d = 13\times(a+b+c+d$, ou seja: $987a+87b+9c = 12d$. Ora, o valor $987a \geqslant 987$ já impossibilita $987a+87b+9c$ igualar nem mesmo o valor máximo de $12d$, que é 108.
Resumindo, não existe azarados com quatro algarismos. Embora o problema não peça, é agora fácil ver que também não existem azarados de cinco ou mais algarismos.

Problema 8 -

As figuras abaixo foram feitas da esquerda para a direita. A primeira representa um quadrado de lado c. Dentro dele, primeiro foi desenhado um quadrado de lado b e depois outro de lado a, conforme mostram a segunda e terceira figura. Depois disso, foram pintadas as regiões da quarta figura, onde temos um novo quadrado de lado m e dois retângulos ambos de lados n e p.



Dizemos que três inteiros positivos (a,b,c), escritos nesta ordem, formam uma trinca pitagórica *se verificarem $a^2+b^2=c^2$. Assim sendo e raciocinando com áreas e álgebra, pede-se:*
a). Provar que se esses (a,b,c) forem uma trinca pitagórica, então $m^2=2np$.
b). Provar que se (a,b,c) verificarem $m^2=2np$, então eles formam um trinca pitagórica.
c). Determinar todas as trincas pitagóricas que dão $m=10$.
Resp.:
Observe que as áreas dessas figuras dão a igualdade algébrica: $c^2=b^2+a^2-m^2+2pn$.
a). Valendo $a^2+b^2=c^2$, a igualdade acima fica: $0=-m^2+2pn$, ou seja: $m^2=2pn$.
b). Valendo $m^2=2pn$, a igualdade acima fica: $c^2=b^2+a^2$, ou seja (a,b,c) é trinca pitágorica.
c). Vistos os dois itens anteriores, os números inteiros a,b,c que precisamos determinar são exatamente os associados a $100=2np$, ou seja $np=50$. Iniciando, observemos que como a,b,c são inteiros, as figuras mostram que tanto n como p também são números inteiros. Então, de $n=50/p$ e que $1\leqslant n,p\leqslant 50$, segue que os valores procurados são: $(n,p) = (50,1),(25,2),(10,5),(5,10),(2,25),(1,50)$. Finalmente, observemos que as figuras mostram que as trincas pitagóricas a eles associadas ficam determinadas pelas igualdades:

$$c=p+m+n=50+n+p, \quad b=c-p, \quad a=c-n,$$

o que, imediatamente, nos dá as trincas pitagóricas desejadas:
$(a,b,c)=(11,60,61),(12,35,37),(15,20,25),(20,15,25),(35,12,37),(60,11,61)$.
Observ.:
a maioria dos alunos não percebeu a diferença entre as afirmações dos itens a) e b).