Nível 3

Problema 1 -

A tela dos televisores antigos tem lados na razão 4:3, e nos televisores modernos a razão dos lados é de 16 para 9. Tem-se um vídeo que preenche completamente a tela de um televisor moderno mas que num televisor antigo, quando se ajusta perfeitamente a imagem na largura da tela, deixa sobrando espaço na vertical da tela. Calcular o percentual de tela não usado pelo televisor antigo.

Sol.

Indiquemos por h a altura da faixa ocupada pelo vídeo no TV antigo. Temos que $\frac{h}{4} = \frac{9}{16}$, de modo que $h = \frac{9}{4}$. Então, a área da parte não usada vale $(3 - \frac{9}{4}) \times 4 = 3$. Ora, essa área vale $\frac{3}{4\times 3} = 0.25 = 25\%$ da área da tela do TV antigo.

Problema 2 -

Determinar o dígito das unidades de $y = x^2$ *quando* x *for expresso por* $x = 2016^2 + 2^{2016}$.

Sol.

É imediato se ver que, a medida que n vai crescendo, o dígito das unidades de 2^n vai percorrendo o ciclo $2, 4, 8, 6$; como $2016 = 4 \times 504$, disso segue que o dígito das unidades de 2^{2016} é 6. Por outro lado, é imediato que o dígito das unidades de 2016^2 também é 6, consequentemente o dígito das unidades de x é o dígito das unidades de $6+6$, ou seja é 2. Disso fica imediato ver que o dígito das unidades de x^2 é 4.

Problema 3 -

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que verifica* $f(x/3) = x^2 + x + 1$, *para todos os* $x \in \mathbb{R}$. *Pede-se o valor numérico da soma de todos os* $y \in \mathbb{R}$ *verificando* $f(3y) = 7$.

Sol.

Temos $f(3y) = f(\frac{9y}{3}) = (9y)^2 + (9y) + 1 = 7$. Colocando $u = 9y$, temos $u^2 + u - 6 = 0$, a qual tem raízes: $u = -3$ (que corresponde a $y = -3/9 = -1/3$), e $u = 2$ (que corresponde a $y = 2/9$). Conclusão: a soma pedida vale $-1/3 + 2/9 = -1/9$.

Problema 4 -

A Figura 1 é composta de três quadrados cujos lados têm como medida números inteiros: m *para o maior e* n *para os menores. Eles são usados para construir a Figura 2. Essas figuras constituem uma demonstração alternativa e sem palavras de que* $\sqrt{2}$ *é irracional, como veremos a seguir.*

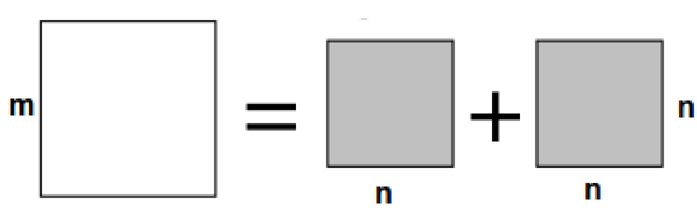

FIGURA 1

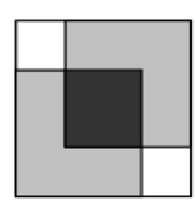
FIGURA 2

- *a). Supondo a Figura 1 expresse uma igualdade de áreas, mostre que ela determina uma representação em fração ordinária para* $\sqrt{2}$, *e os quadrados menores da Figura 2 determinam outra.*
- *b). Mostre que as frações do item anterior podem ser vistas como tendo uma incompatibilidade que implica na demonstração por absurdo da irracionalidade de* $\sqrt{2}$.

Sol.
a).
Da primeira figura: $m^2 = 2n^2$, de modo que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.
Na segunda figura, é imediato que o lado dos quadrados brancos vale $m-n$, e que o lado do quadrado escuro vale $m - 2(m-n) = 2n - m$. De modo que $(2n-m)^2 = 2(m-n)^2$ e, assim, obtemos uma segunda representação fracionária: $\frac{2n-m}{m-n} = \sqrt{2}$.
b).
Podemos escolher m, n de modo que m/n seja uma fração irredutível. Ora, como $n < m$, segue que $2n < 2m$ e então $2n - m < m$; por outro lado, como temos de ter $m/n < 2$, segue que $m < 2n$ e que $m - n < n$. Ou seja, $\frac{2n-m}{m-n}$ é uma representação fracionária de $\sqrt{2}$ ainda "menor" do que a representação fracionária irredutível $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Absurdo.
Comentário.
A aluna Mariana Bigolin observou que, com o quadrado escuro e os brancos da Fig. 2, podemos fazer uma nova versão da Fig. 1 e dela uma nova versão da Fig. 2, ambas com quadrados menores, e que esse tipo de construção poderia ser continuado indefinidamente. Mas isso é absurdo, pois o conjunto dos inteiros positivos é finito.

Problema 5 -

Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1 - x$. A partir delas, definimos uma sequência de 100 *funções, $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{100}$, por meio das seguintes recursões:*

$$F_1(x) = g\big(f(x)\big),\ F_2(x) = g\big(f(F_1(x))\big),\ F_3(x) = g\big(f(F_2(x))\big),\ F_4(x) = g\big(f(F_3(x))\big),\ \textit{etc.}$$

Pede-se expressar o valor de $F_{100}(2016)$ por meio de uma fração ordinária irredutível.
Sol.
Notemos que:
$F_1(x) = g(\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$;
$F_2(x) = g\big(f(\frac{x-1}{x})\big) = g\big(\frac{x}{x-1}\big) = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}$;
$F_3(x) = g\big(f(\frac{1}{1-x})\big) = g(1-x) = 1 - (1-x) = x$.
Consequentemente, a sequência $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, \dots$
em verdade é: $F_1, F_2, F_3, F_1, F_2, F_3, F_1, F_2, F_3, F_1, F_2, F_3, F_1, \dots$. Disso segue que, como $100 = 1 + 3 \times 33$, $F_{100} = F_1$. Consequentemente:
$F_{100}(2016) = \frac{2015}{2016}$, a qual é irredutível pois $2015 = 5 \times 13 \times 31$ e $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

Problema 6 -

Determinar todas *as PG que têm três termos consecutivos tais que o produto deles vale* 64 *e a sua soma vale* 14.
Sol.
Indicando por a o termo inicial e por r a razão da PG, esta se escreve: $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$
Queremos:
$ar^n \cdot ar^{n+1} \cdot ar^{n+2} = 64$, logo: $r^{3n}(a \cdot ar \cdot ar^2) = 64$, logo: $r^{3n} \cdot a^3 \cdot r^3 = 64$, e então $r^n ar = 4$;
$ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} = 14$, logo: $a(1 + r + r^2)r^n = 14$.
Usando que $ar^n = 4/r$, a última igualdade fica $(1 + r + r^2)4/r = 14$, logo $1 + r + r^2 = 7r/2$, e então: $r^2 - 5r/2 + 1 = 0$. Essa equação tem raízes: $r = 2$ e $r = 1/2$. Passemos, então, à determinação das PG's pedidas.

• PG's com $r = 2$.
O termo inicial vale $a = \frac{4}{r^{n+1}} = \frac{4}{2^{n+1}} = 2^{1-n}$. Então,
$n = 0 \to \quad a = 2^1 \quad = 2 \quad \to \quad \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, 32, \ldots$
$n = 1 \to \quad a = 2^{1-1} = 1 \quad \to \quad 1, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, 32, \ldots$
$n = 2 \to \quad a = 2^{1-2} = 1/2 \to \quad 1/2, 1, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, 32, \ldots$
$n = 3 \to \quad a = 2^{1-3} = 1/4 \to \quad 1/4, 1/2, 1, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, 32, \ldots$
etc.

• PG's com $r = 1/2$.
O termo inicial vale $a = \frac{4}{r^{n+1}} = 4 \cdot 2^{n+1} = 8 \cdot 2^n$. Então,
$n = 0 \to \quad a = 8 \cdot 2^0 = 8 \quad \to \quad \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, 1, 1/2, \ldots$
$n = 1 \to \quad a = 8 \cdot 2^1 = 16 \to \quad 16, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, 1, 1/2, \ldots$
$n = 2 \to \quad a = 8 \cdot 2^2 = 32 \to \quad 32, 16, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, 1, 1/2, \ldots$
etc.

Problema 7 -

Determinar todos os números primos da forma $n^5 - 1$ onde n é um número inteiro positivo.
Sol.
A identidade básica $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ dá $n^5 - 1 = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$. Logo, para que $n^5 - 1$ seja primo, uma vez que $(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) > 1$, é necessário que $n - 1 = 1$ e que $n^5 - 1 = (n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$. Ora, então, é necessário que $n = 1 + 1 = 2$. Resumindo, ou $n = 2$ dá $n^5 - 1$ primo ou nenhum outro valor inteiro positivo de n faz isso. Vamos decidir: para $n = 2$ o valor de $n^5 - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ que é efetivamente um número primo.
Conclusão: 31 é o único número primo que pode ser escrito na forma $n^5 - 1$ com n inteiro positivo.
Possível dúvida: também precisamos verificar que para $n = 2$ temos $n^5 - 1 = (n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$? Não, pois $n^5 - 1 = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$ é uma identidade: ela vale para qualquer valor de n, logo tem de valer automaticamente para $n = 2$.

Problema 8 -

Uma pisana *é uma sequência numérica que inicia com inteiros a e b, nesta ordem, tem $a < b$ e é tal que cada um dos demais termos é a soma dos dois termos que lhe antecederam na sequência.*

i). Dar uma fórmula para os termos de cada pisana usando a famosa sequência de Fibonacci $F_1, F_2, F_3, \ldots$, a qual é definida pela recursão: $F_1 = F_2 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para cada $n \geqslant 3$.
ii). Quantas pisanas têm 196 como terceiro termo?
iii). Determinar todas as pisanas que têm 196 como quarto termo.

Sol.
i). Forma geral das pisanas: $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, \ldots$. Valores numéricos da sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. É imediato se verificar que o n-ésimo termo de uma pisana é dado por $p(n) = aF(n-2) + bF(n-1)$.
ii). Pisanas cujo terceiro termo é 196 são caracterizadas por $a + b = 196$ e $a < b$, com a, b inteiros.
– Para $a = 0$: só a pisana de $b = 196$.
– Para $a = -1, -2, -3, \ldots$: sempre que a for negativo ele determina um b verificando as duas restrições, pois $b = 196 - a > 196 > 0 > a$. Logo, existem infinitas pisanas de a inteiro negativo e terceiro termo 196, são as que têm $a = -1, -2, -3, \ldots$ e $b = 196 - a$.
– Para $a = 1, 2, 3, \ldots$: a restrição $a < b$ nos permite achar b verificando $a + b = 196$ somente até $a = 97$, ou seja: existem apenas 97 pisanas com a inteiro positivo e terceiro termo 196. Elas são:
$1, 195, 196, \ldots; \quad 2, 194, 196, \ldots; \quad 3, 193, 196, \ldots; \quad$ etc. $\quad ; 97, 99, 196, \ldots$.

iii). Pisanas cujo quarto termo é 196 são caracterizadas por $a+2b=196$ e $a<b$, com a, b inteiros. De modo que arbitrando valores para a, obtemos $b=98-a/2$, que teremos de verificar se é inteiro e maior que a.
– Para $a=0$: só a pisana de $b=98$.
– Para $a=-1,-2,-3,\ldots$: a fórmula $b=98-a/2$ já elimina todos os a ímpares. No caso de a par, teremos $b=98-a/2=$ inteiro positivo, logo maior que a. Conclusão: existem infinitas pisanas cujo quarto termo é 196 e tem a inteiro negativo: são todas as que têm a inteiro negativo par, e $b=98-a/2$.
– Para $a=1,2,3,\ldots$: novamente, a fórmula $b=98-a/2$ já elimina todos os a ímpares. Nos casos restantes de a par positivo, devemos ter $b=98-a/2>a$, ou seja: $98>3a/2$, isso é $a<196/3=65,33$, que fica $a\leqslant 64$. Conclusão: existem 32 pisanas de a inteiro positivo, elas são:
$2,97,99,196,\ldots$; $4,96,100,196,\ldots$; $6,95,101,196,\ldots$; etc. ; $64,66,130,194,\ldots$.