Nível 1

Problema 1 -

Sabe-se que num grupo de amigos há de 45% a 50% de garotas. Qual o menor número de garotas possível nesse grupo?

Sol.

Indico por m e g o número de meninos e garotas, respectivamente. O enunciado nos diz que $0.45(m+g) < g$ e $g < 0.50(m+g)$. A primeira desigualdade pode ser reescrita como $\frac{9}{20}(m+g) < g$, ou seja $9m + 9g < 20g$, o que dá $9m < 11g$. A segunda desigualdade pode ser reescrita como: $2g < m + g$, de onde tiramos $g < m$.

Resumindo, qualquer grupo cujo número de meninos e de garotas verificam $9m < 11g$ e $m < g$, satisfaz as condições do problema. Resta determinarmos o *menor* valor de g, m verificando essas desigualdades. Para isso, vamos dar valores sucessivos para g e ver quando, pela primeira vez, podemos encontrar um $m > g$ verificando $9m < 11g$.

Para $g = 1$, vemos ser impossível achar $m \geqslant 2$ com $9m < 11$. Para $g = 2$, também não existe $m \geqslant 3$ verificando $9m < 22$. Continuando, vemos que a primeira vez que a condição é obedecida é com $g = 5$. Com efeito, $m = 6 > g = 5$ e verifica $9m < 55$.

Conclusão: o menor grupo tem cinco garotas e seis meninos.

Observação. Vários alunos, por tentativas, descobriram que $g = 9$ e $m = 10$, verificam as duas condições (desigualdades). Contudo, esse não é o grupo com o menor número de garotas!

Problema 2 -

Temos três números com as seguintes duas propriedades: vale 243 o produto do segundo pelo quadrado do primeiro e pelo cubo do terceiro; por outro lado, o produto do primeiro pelo quadrado do segundo vale 81. Pede-se calcular o valor do produto *desses três números.*

Sol.

Indicando por a, b, c tais números, podemos escrever: $a^2bc^3 = 243$ e $ab^2 = 81$. Multiplicando: $a^2bc^3 \times ab^2 = a^3b^3c^3 = 243 \times 81 = 3 \times 81 \times 81 = 3 \times 9^2 \times 9^2 = 3 \times 3^4 \times 3^4 = 3^9$, de modo que $abc = 3^3 = 27$.

Problema 3 -

Considere a sequência de números dada pelo padrão $1, 12, 123, 1231, 12312, 123123, 1231231, \ldots$ *Determinar o valor da soma dos dígitos do* 2016*-ésimo número dessa sequência.*

Sol.

Como $2016 = 3 \times 672$, é imediato vermos que o 2016-ésimo número dessa sequência tem 672 blocos 123. Como a soma dos dígitos de cada bloco vale 6, segue que a soma pedida vale $6 \times 672 = 4032$.

Problema 4 -

Ana, Beto e Carlos estão aparando grama. O gramado de Ana tem o dobro da área do de Beto e o triplo da área do gramado de Carlos. O aparador de grama de Carlos corta com a metade da velocidade do de Beto, e com um terço da velocidade do de Ana. Sendo que os três amigos iniciaram o trabalho ao mesmo tempo, quem terminará primeiro? Justifique sua resposta.

Sol.

Indiquemos por A, B e C a área do gramado de Ana, Beto e Carlos, respectivamente, e por a, b, c a velocidade do aparador de cada um deles. Em termos de áreas, temos as relações B = A/2 e C = A/3, e em termos de velocidades: $a = 3c, b = 2c$.

O tempo gasto por Ana é $A' = \frac{A}{3c} = \frac{1}{3}\frac{A}{c}$; o de Beto é $B' = \frac{A/2}{2c} = \frac{1}{4}\frac{A}{c}$, e o de Carlos é $C' = \frac{A/3}{c} = \frac{1}{3}\frac{A}{c}$.

A menor dessas três frações é a de Beto. Ou seja: Beto termina primeiro.

Problema 5 -

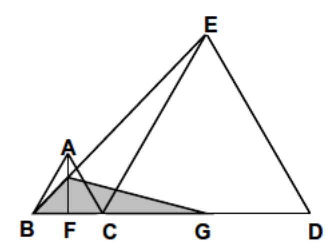
Quando Ana dançava, seu colar de pérolas se rompeu
Do total de pérolas, a terça parte no chão se perdeu
A metade uma amiga aparou e a décima parte seu namorado segurou
E com quatro pérolas o colar ficou.
Diga-me: quantas pérolas escaparam?
Sol.
Indiquemos por x o número total de pérolas do colar.
Temos: $4 = x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{10}\right) = x - \frac{28}{30}x = \frac{2}{20}x = \frac{x}{15}$, de modo que $x = 60$. Logo, escaparam 60 - 4 =56 pérolas.

Problema 6 -

A tela dos televisores antigos tem lados na razão 4:3, e nos televisores modernos a razão dos lados é de 16 para 9. Tem-se um vídeo que preenche completamente a tela de um televisor moderno mas que num televisor antigo, quando se ajusta perfeitamente a imagem na largura da tela, deixa sobrando espaço na vertical da tela. Calcular o percentual de tela não usado pelo televisor antigo.
Sol.
Indiquemos por h a altura da faixa ocupada pelo vídeo no TV antigo. Temos que $\frac{h}{4} = \frac{9}{16}$, de modo que $h = \frac{9}{4}$. Então, a área da parte não usada vale $(3 - \frac{9}{4}) \times 4 = 3$. Ora, essa área vale $\frac{3}{4\times3} = 0.25 = 25\%$ da área da tela do TV antigo.

Problema 7 -

Na figura, o triângulo ABC tem todos os lados iguais, e o mesmo ocorre com o triângulo CDE. Ademais, C é o ponto de BD tal que $BC = 1$ e $CD = 4$; além disso, F e G são os pontos médios de BC e CD, respectivamente. Determinar a área da figura sombreada.



Sol.
A área desejada vale $a(OBG) = a(BEG) - a(OEG)$, onde O é o ponto intersecção de AF com BE. Como o triângulo CDE tem todos os lados iguais e G é o ponto médio de CD, o segmento EG é perpendicular a BD. Em particular, o triângulo DEG é retângulo, o que permite aplicar Pythagoras, obtendo-se: $EG = \sqrt{ED^2 - GD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Então: $a(BEG) = \frac{BG\cdot EG}{2} = \frac{3\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
Indicando por O' a intersecção da perpendicular por O com EG, temos que $a(DEG) = \frac{OO'\cdot EG}{2}$, e como $OO' = FG = FC + CD = 1/2 + 2 = 5/2$, temos $a(DEG) = \frac{5/2\cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
Conclusão: $a(OBG) = a(BEG) - a(OEG) = 3\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 8 -

Determine o menor *número inteiro positivo com as seguintes propriedades: quando dividido por 2 deixa resto 1, quando dividido por 3 dá resto 2, quando dividido por 4 deixa resto 3, quando dividido por 5 dá resto 4, quando dividido por 6 deixa resto 5 e quando dividido por 7 produz resto 0.*
Sol.
Como o número desejado é múltiplo de 7, ele deve estar na lista: $7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots, 133, 140,$ etc.
Como deixa resto 1 ao ser dividido por 2, dessa lista sobram $7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, 133,$ etc.
Como deixa resto 2 ao ser dividido por 3, dessa última lista sobram $35, 77, 119, 161, 203,$ etc.
Como deixa resto 3 ao ser dividido por 4, dessa última lista sobram $35, 119, 203,$ etc.
Como deixa resto 4 ao ser dividido por 5, dessa última lista sobram 119, etc.
Como deixa resto 5 ao ser dividido por 6, dessa última lista sobram 119, etc.
Conclusão: o menor número satisfazendo a todas as condições é 119.