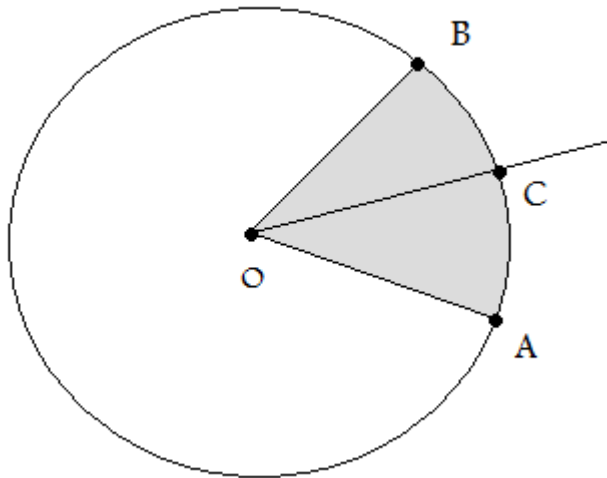


ORM-Grande Porto Alegre – 2011 – PROVAS NIVEL 1

PROBLEMA 1.

a) Dado o círculo com diâmetro de 24cm e centro em O, e o setor circular (área hachurada) de área 24π cm² formado por O e os pontos A e B, como mostra a figura. Demonstre que a semi-reta que passa por O e C é bissetriz do ângulo AÔB, sabendo que o ângulo CÔB mede 30°.



b) Calcule a área e o perímetro do triângulo retângulo cujos dois menores lados têm como medida números consecutivos, e o menor deles é o menor número ímpar primo.

Solução:

a) Como o diâmetro do círculo mede 24 cm, o raio mede 12 cm. Como a área do círculo é dada por πr^2 ela vale 144π cm².

A área do setor circular mede 24π cm² o que corresponde a $\frac{1}{6}$ da área do círculo. Assim o ângulo formado por AÔB corresponde a $\frac{1}{6}$ de 360° (uma volta completa):
 $A\hat{O}B = \frac{1}{6} \text{ de } 360^\circ = 60^\circ$.

Sabendo que CÔB mede 30°, temos $A\hat{O}C = 30^\circ$
Logo, a semi-reta OC é bissetriz do ângulo AÔB.

b)

O menor número ímpar primo é o número 3 e o seu consecutivo é 4, logo são essas as medidas dos menores lados do triângulo dado. O terceiro lado tem de ser a hipotenusa do triângulo e sua medida, por Pitágoras, vale $4^2+3^2=5^2$.

A área do triângulo é dada por $(b \times h)/2$, no caso $(3 \times 4)/2=6$ unidades de área. O perímetro do triângulo vale $3+4+5=12$ unidades de comprimento.

PROBLEMA 2 .

a) Determine o menor número natural tal que sua divisão por 2 tenha resto 1, sua divisão por 3 resto 2, sua divisão por 4 resto 3, sua divisão por 5 resto 4, sua divisão por 6 resto 5 e sua divisão por 7 é exata

b) Determine o resto da divisão de $8 + 2^{25}$ por 3.

c) Qual o primeiro número maior que $8 + 2^{25}$ que é múltiplo de 3?

d) Verifique se 5 é divisor de $2 + 3^{14}$.

Solução:

a) Resposta: 119

Denotemos por X o número que estamos procurando. Observe essas condições exigidas pelo problema:

X dividido por 2 dá resto 1.

X dividido por 3 dá resto 2.

e assim por diante até

X dividido por 6 dá resto 5.

Podemos notar que o resto dá sempre uma unidade a menos do que o divisor. Isso significa que o número seguinte ao número X , ou seja, $X+1$ será divisível exatamente por 2,3,4,5 e 6.

Logo, o menor $X + 1$ possível corresponde ao mínimo múltiplo comum destes números, no caso $4 \times 5 \times 6 = 120$; isto é, $X+1$ é igual a 120, portanto o número X será 119 que também satisfaz a última condição, ou seja, ser divisível por 7.

Portanto, se $X+1$ é igual a 120, o número X que estamos procurando é 119, que também é divisível por 7.

b)

$$8+2^{25} = 8+ 2 \times (2^2)^{12} \equiv 2+1^{12} \times 2 \pmod{4} = 2+2=4.$$

Logo, resto = 1.

c) $1+2 = 3$ Resposta : $10+2^{25}$

$$d) 2 + (3^2)^7 \equiv 2+ 4^7 \pmod{5} = 2+ 4 \times (4^2)^3 \equiv 2+1 \times 4 \pmod{5} = 6.$$

Logo, resto = 1. Não é divisor

PROBLEMA 3 .

Guilherme observou que em seu bairro as linhas de ônibus funcionam 24 horas por dia, e que os ônibus passam nas paradas de 12 em 12 minutos. Sabendo que um ônibus passa na sua parada exatamente às 13h46min, ele resolveu calcular

o quanto ele iria esperar na parada estando lá às 09h16min da manhã seguinte. Calcule você quanto o Guilherme esperou.

Solução:

Como as linhas de ônibus funcionam 24 horas por dia, precisamos saber quantos intervalos de 12 minutos há entre as 13h46min (hora que passa um ônibus) e às 9h16min (hora que o Joãozinho estará na parada de ônibus).

Ora, entre as 13h46min e 9h16min há um intervalo de 19 horas e 30 minutos o que corresponde a 1.170 minutos. Como $1170 / 12 = 97$ e deixa resto 6, segue que Guilherme terá que esperar 6 minutos na parada.

PROBLEMA 4 .

Tenho 693 amigos em minha rede social, e nela publiquei a frase de Pitágoras: “ A Matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo”.

a) O número de amigos que curtiram minha frase tem dois dígitos iguais e é divisor de 693. A soma desses dois dígitos dá um número de dois dígitos que somados é um número primo.

Quantos curtiram minha frase?

b) Dos que curtiram minha frase, $\frac{1}{7}$ comentaram minha frase. Quantos comentaram?

Solução:

a)

Note que não poderíamos ter um número de 3 dígitos que satisfaça as condições exigidas. Por quê?

Assim, vamos nos ater aos números de dois dígitos que obrigatoriamente devem ser iguais.

Considerando que a soma desses dois dígitos tem de ser um número de dois dígitos, os candidatos são 55, 66, 77, 88, 99; a soma de seus algarismos vale respectivamente, 10, 12, 14, 16, 18, destas somas apenas três têm como soma de seus algarismos números primos: 12, 14, 16, que estão associadas à 66, 77, 88 respectivamente, sendo apenas 77 divisor de 693.

Conclusão: 77 pessoas curtiram a frase.

b) Como $\frac{1}{7}$ das pessoas que curtiram a frase corresponde a $\frac{1}{7}$ de 77, segue que 11 pessoas comentaram a frase.

PROBLEMA 5 .

No tanque do carro de Alexandre cabem 50 litros de gasolina, ele emprestou o carro para Gabriela com o tanque cheio e ela não abasteceu o carro antes de devolvê-lo .

a) Com quantos litros no tanque ela devolveu o carro sabendo que a quantidade em litros de gasolina que ela usou é 40% da capacidade do tanque.

b) Sem reabastecer o carro, Alexandre consumiu mais $\frac{1}{3}$ da gasolina que tinha restado para ir à escola, depois consumiu $\frac{1}{5}$ do restante para voltar para casa. Quanto litros de gasolina ele precisa para encher o tanque?

Solução

a)

Gabriela usou 40% de 50 litros que corresponde à $0,40 \times 50$ litros = 20 litros.

Assim, ela devolveu o carro com $50 - 20 = 30$ litros.

b)

Alexandre consumiu $\frac{1}{3}$ de 30 litros para ir à escola; logo consumiu 10 litros e restaram 20 litros no tanque. Consumiu $\frac{1}{5}$ de 20 litros para voltar para casa, isto é, 4 litros, restando no tanque 16 litros. Logo, para encher o tanque ele precisa de $50 - 16 = 34$ litros.