1ª Questão: Inteiros

a) Sejam x,y,w,z inteiros não nulos, tais que: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=1$. Mostre que ao menos um deles tem que ser par. (12 pontos)

b) Se quatro inteiros positivos distintos, m, n, p e q satisfazem a equação: (7-m).(7-n).(7-p).(7-q) = 4, então o valor numérico de m+n+p+q é igual a? (8 pontos)

Resolução:

a)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=1$$

$$\frac{yzw+xzw+xyw+xyz}{xyzw}=1$$

yzw+xzw+xyw+xyz=xyzw

Demonstração por absurdo : Se considerarmos x,y,z e w todos ímpares temos

yzw + xzw + xyw + xyz = xyzw

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

<u>impar +impar+ impar +impar</u> = impar

↓ ↓

par =impar

Absurdo, devido a não paridade na igualdade.

b)

Temos que (7-m), (7-n), (7-p), (7-q) são também distintos, e como

4=1.4=(-1).(-4)=(-2).(-2)=2.2 =(-1).(-1).(2).(2)=(1).(1).(-2).(-2)=(-1).(1).(-2).(2).

Assim a única possibilidade de termos 4 fatores distintos é considerarmos

4=(-1).(1).(-2).(2) obtendo-se:

7-m=-1 7-8=-1 m=8

7-n=1 7-6=1 n=6

7-p=-2 7-9=-2 p=9

7-q=2 7-5=2 q=5

8+6+9+5=28

2ª Questão: Congruência

a) Encontre todos os números naturais de 30 dígitos que são múltiplos de 13 e tem os primeiros 13 dígitos iguais entre si e distintos de zero e os últimos 13 dígitos iguais entre si e os quatro do meio são 4, 0, 2,0 nesta ordem. (12 pontos)

b) Mostre que 41 divide $2^{20}-1$. (8 pontos)

Resolução:

a)
Os números procurados são da forma
aaaaaaaaaaaaa4020bbbbbbbbbbbbb, que pode ser escrito
$a(111111111111).10^{18} + a4020b.10^{12} + b(111111111111)$
Sendo $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a \neq 0$
Note que $111111 \equiv 0 \bmod 13$, isto é 13 divide 111111
Temos então,

$$\underbrace{a(111111111111).10^{18}}_{\text{congruente a 0 mod 13}} + a4020b.10^{12} + \underbrace{b(111111111111)}_{\text{congruente a 0 mod 13}} \equiv a4020b.10^{12} \bmod 13$$

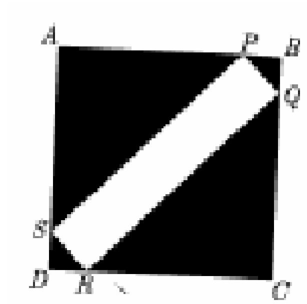
Como
$10^{12} \equiv 1 \bmod 13$, temos $a4020b.10^{12} \equiv a4020b \equiv a.10^5 + 4.10^4 + 2.10^2 + b \bmod 13$

Considerando-se os possíveis valores de a e b temos: $4a + 5 + b = (13,26,39)$, isto é
$4a + b = 13-5 = 8$ $\quad$ $a=1$ e $b=4$
$4a + b = 26-5 = 21$ $\quad$ $a=3$ e $b=9$, $a=4$ e $b=5$, $a=5$ e $b=1$
$4a + b = 39-5 = 34$ $\quad$ $a=7$ e $b=6$, $a=8$ e $b=2$

b)
Temos que
$2^{20} = (2^6)^3.2^2 = (64)^3.4$
Sendo
$(64^3 4) \equiv 23^3.4 \equiv 23^2.92 \equiv 23^2 92 \equiv 529 . 92 \equiv 37.10 \equiv 1 \bmod 41$, isto é
$2^{20} \equiv 1 \bmod 41$ logo
$2^{20}-1 \equiv 0 \bmod 41$, isto é, 41 divide $2^{20}-1$

3ª Questão: Geometria

Do quadrado ABCD foram cortados os triângulos isósceles sombreados, como na figura, restando o retângulo PQRS. Sabendo que a área total do que foi cortado mede 200 cm^2, qual é o comprimento de PR, em cm? (20 pontos)

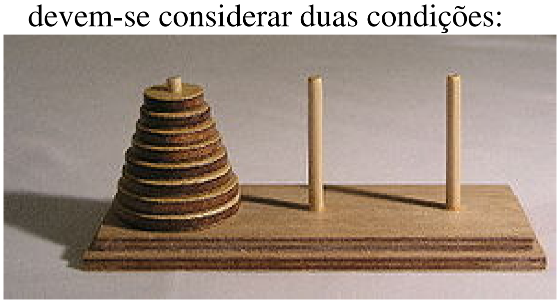


Resolução:
Usaremos a seguinte notação:
ΔABC= triângulo com vértices A, B e C.
A(ΔABC)= área do triângulo com vértices A, B e C.
AB= segmento com origem em A e extremidade em B.
Por construção, temos
$\Delta PBQ \equiv \Delta SDR$ (Triângulos retângulos)
$\Delta APS \equiv \Delta CQR$ (Triângulos retângulos)
Logo A(ΔPBQ)+A(ΔQCR)=100cm^2
Sendo
A(ΔPBQ)= $PB \cdot \frac{PB}{2}$
A(ΔQCR)=QC.$\frac{QC}{2}$
Logo, PB.$\frac{PB}{2}$+QC.$\frac{QC}{2}$=100cm^2
PB.PB+QC.QC= 200cm^2

Temos que PR é uma das diagonais do retângulo PQRS, então
PR^2=PQ^2+RQ^2 (Pitágoras)
Como
PQ^2=2.PB^2 (Pitágoras)
RQ^2=2.QC^2 (Pitágoras)
Temos
PR^2=2(PB^2+ QC^2)=2.200cm^2=400cm^2
PR=20 cm

4ª Questão: Torre de Hanói

Na figura abaixo temos três pinos sendo que no primeiro pino são colocados discos de diâmetro crescente de cima para baixo. O jogo consiste em transferir os discos que formam a torre, para um dos pinos vazios, no menor número de movimentos possíveis. Porém devem-se considerar duas condições:



1) deve-se movimentar um único disco por vez;

2) não pode colocar um disco de maior diâmetro sobre um de menor diâmetro.

a) Qual o menor número de movimentos necessários para transferir uma torre de três discos para um dos pinos vazios? (4 pontos)
b) Qual o menor número de movimentos necessários para transferir uma torre de quatro discos para um dos pinos vazios? (6 pontos)
c) Para transferir uma torre de n discos, o número mínimo de movimentos realizados foram 255. Qual será o menor números de movimentos necessários para transferir uma torre de n+1 discos? (10 pontos)

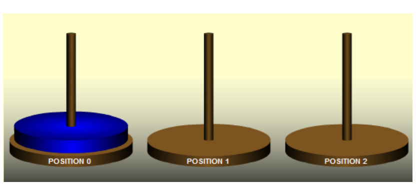
Resolução:
Observação:
Nos itens a, b e c se suprimirmos a palavra "necessários" ou substituí-la por "suficientes" temos o que realmente gostaríamos de perguntar. Pelas respostas apresentadas verificamos que ela não atrapalhou o entendimento da questão, pois os alunos a consideraram como se fosse "suficientes". A solução que apresentaremos leva em conta essas considerações.

Utilizaremos a seguinte notação: D1, D2, D3...DN os discos da torre em tamanho decrescente; P1, P2, P3, o primeiro segundo e terceiro pino, assim D2P1 significa segundo disco no primeiro pino.

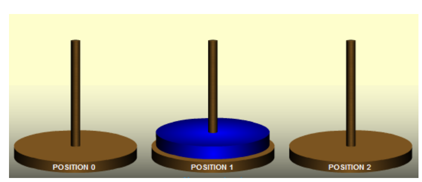
Indicaremos por n o número de discos, por Mn o menor número de movimentos para transferir uma Torre de n discos. Utilizaremos a seguinte notação: D1, D2, D3...DN os discos da torre em tamanho decrescente; P1, P2 e P3, o primeiro, segundo e terceiro pino. Assim D2P1 significa segundo disco no primeiro pino.

A seguir apresentaremos a resolução do problema Torre de Hanói.

Para n=1, temos os seguintes movimentos:



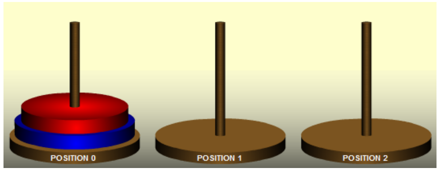
Posição inicial : D1 P1



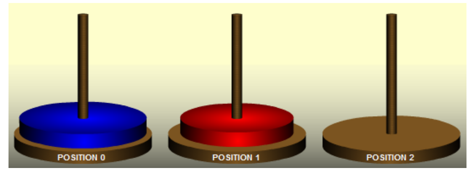
Primeiro Movimento : D1 P2
(Posição final).

M1 = 1

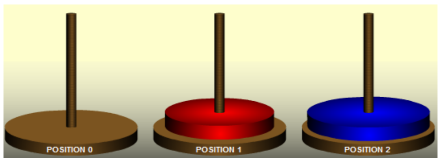
Para n=2, temos os seguintes movimentos:



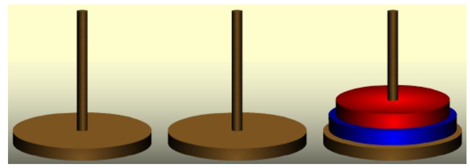
Posição inicial : D1 P1, D2 P1



Primeiro movimento : D1 P2, D2 P1



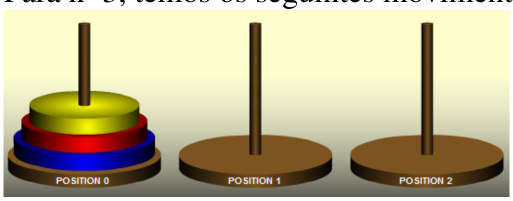
Segundo movimento: D1 P2, D2 P3



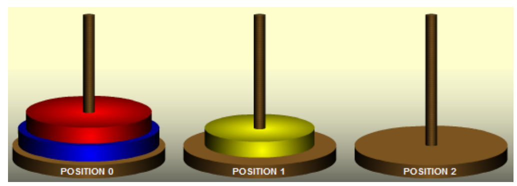
Terceiro movimento: D1 P3, D2 P3 (posição final).

M2 = 3 =2*1+1

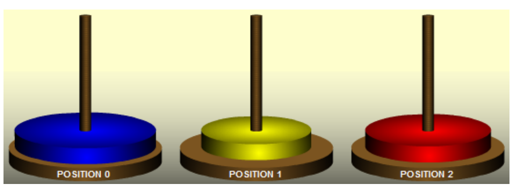
Para n=3, temos os seguintes movimentos:



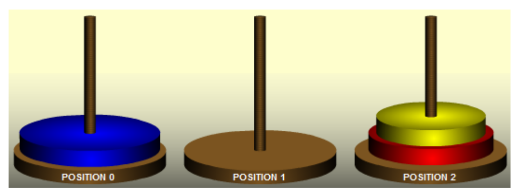
Posição inicial: D1P1, D2P1, D3P1.



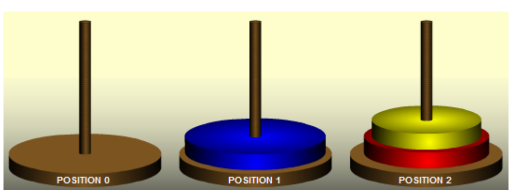
Primeiro movimento:D1P2, D2P1,D3P1.



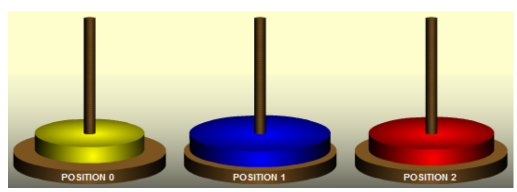
Segundo movimento: D1P2,D2P3,D3P1.



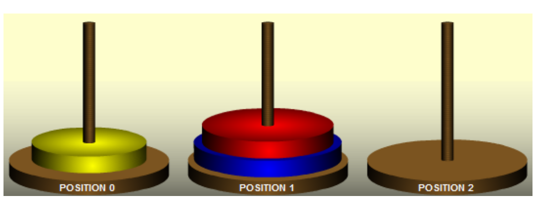
Terceiro movimento:D1P3, D2P3, D3P1.



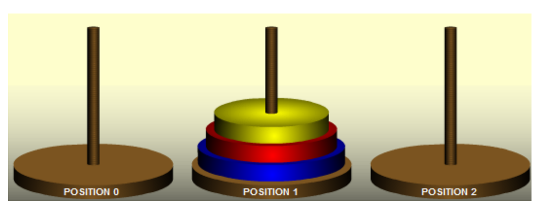
Quarto movimento: D1P3, D2P3,D3P2.



Quinto movimento: D1P1,D2P3, D3P2.



Sexto movimento: D1P1, D2P2, D3P2.



Sétimo movimento: D1P2, D2P2, D3P2 (posição final)

M3=7=2*3+1

Note que esta sequência de movimentos pode ser dividida em três etapas.

A primeira etapa corresponde aos três primeiros movimentos que correspondem aos utilizados na situação n=2 anterior. Na segunda etapa temos o quarto movimento que transporta o disco maior da torre para a posição onde se formará a nova torre. Na terceira etapa ocorre uma sequência de movimentos semelhantes a da situação n=2.

Assim se justifica o porquê da colocação 7=1+2*3, isto é, M3 = 1+2*M2. Temos também que M2, por construção, é uma sequência de menor número de movimentos para transferir uma torre de 2 discos conforme as regras do jogo, consequentemente M3 também o é. Generalizando empiricamente obtemos a seguinte relação recursiva M_{n+1} = 1+2*Mn. Ou seja: sabendo-se o número de movimentos Mn para transferir uma torre de n discos, o número de movimentos M_{n+1} para transferir uma torre de n+1 discos é obtido dobrando Mn e somando 1.

Resumindo: o item a) foi resolvido construtivamente, obtendo-se Mn=7; no item b) utiliza-se a relação recursiva temos M4=1+2*7=15.

Para o item c) como Mn=255, temos M_{n+1} = 1+2*255= 511.

5ª Questão: Percentagem

1) Um fazendeiro colheu 100 quilos de morango com uma umidade de 95% (percentual de água) vendendo a R$ 1.000,00 para um intermediário, que iria revender está carga no outro dia. Devido à umidade deste dia ele teria que vender a R$ 20,00 o quilo para não ter prejuízo. Qual seria está umidade? (20 pontos)

Resolução:

Inicialmente temos
95% de água em 100kg de morango, isto é
95kg de água +5kgMp=100kg M
Sendo: Mp=morango puro(sem água) e M=mistura de morando com água(morango hidratado).
No início, temos que
100 kg de M custa R$1.000,00, logo 1 kg custa R$10,00.
Na nova umidade 1 kg custa 20,00 assim como se obtém o mesmo valor de venda total temos
1.000,00/20,00=50
Isto é, 50kg é a massa dos morangos no dia seguinte, com a seguinte distribuição
50kgM=5kg Mp(não varia)+45kg de água (variou)
Logo $\frac{45}{50}$ (água / M) = 0,90 (umidade)
Isto é, 90% de umidade.