MAT 01 167 - COMBINATÓRIA II
COMPLEMENTAÇÃO DAS NOTAS DE AULA
08\04\2010

1. Séries de potências

Definição 1.1. *Uma série de potências (formal) é uma expressão da forma* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, onde* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de números reais. O termo* formal *se refere ao fato de que valores não são atribuídos a* x*, de modo que não nos preocupamos com convergência.*

Para uma série de potências $f(x)$, usamos $[x^n]f(x)$ para denotar o coeficiente de x^n em $f(x)$.

Exemplo 1.2. Os itens a seguir são exemplos de séries de potências:

(a) $f_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

(b) qualquer polinômio, como por exemplo

$$f_2(x) = -3 + x + 2x^3 = -3 + x + 0x^2 + 2x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \cdots;$$

(c) $f_3(x) = 1 - 2x + 4x^4 - 8x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$.

Note que $[x^5]f_1(x) = 1$, $[x]f_2(x) = 1$, $[x^7]f_2(x) = 0$ e $[x^6]f_3(x) = 64$, por exemplo.

Veremos agora diversas operações definidas em séries de potências.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n.$
2. $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$
3. A divisão da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pela série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ está bem definida se
$$\min\{n : a_n \neq 0\} \geq \min\{n : b_n \neq 0\}.$$
Nesse caso, a divisão é feita como no caso de polinômios, observando que o termo de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ utilizado na divisão é o termo de *menor* grau.
4. $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$
5. $\displaystyle\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$

Exemplo 1.3. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Note que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

A última somatória pode ser reescrita como $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} x^m$ se mudarmos o índice de soma de n para $m = n+1$. Concluímos que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{m=1}^{\infty} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1,$$

de forma que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.4. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4+x^2}$.

Nós sabemos do exemplo anterior que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4+x^2} &= \frac{1/4}{1+x^2/4} = \frac{1/4}{(1-(-x^2/4))} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \big(-(x^2/4)\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.5. Encontre a série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com $a_0 = 1$ tal que $\frac{df}{dx} = f(x)$.

Pelas definições de diferenciação e de $f(x)$, temos a equação

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x).$$

Como duas séries de potências são idênticas se e somente se todos os seus coeficientes coincidem, obtemos a recorrência

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \text{ se } n \geq 0 \end{cases}$$

Por indução, podemos mostrar que $a_n = \dfrac{1}{n!}$. De fato, a base de indução é imediata de $1 = a_0 = \dfrac{1}{0!}$, enquanto que, dado $n \geq 1$, se supusermos que o resultado é válido para $n-1$, temos

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)!} = \frac{1}{n!},$$

concluindo a demonstração. Observe que, na equação acima, utilizamos tanto a recorrência quanto a hipótese de indução.

Exemplo 1.6. Dentre as séries de potências que serão úteis no que vem a seguir, estão as duas versões abaixo da série binomial.

(a) $\displaystyle (1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \frac{x^n}{n!}$, para todo k real.

(b) $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$, para todo inteiro positivo k.

2. Funções geradoras

Como ilustração do uso de séries de potência para a resolução de problemas de contagem, vamos considerar o seguinte problema: qual é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$? Nesta seção, aprenderemos a resolver esse problema como parte de um problema mais geral, que é determinar o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1+x_2+x_3 = n$ para um inteiro não-negativo n qualquer.

A cada variável x_i, podemos associar o conjunto A_i de valores viáveis para x_i, que, no nosso caso particular, serão $A_1 = A_2 = A_3 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (pois cada uma das variáveis x_1, x_2, x_3 pode ser qualquer inteiro não-negativo). Além disso, ao conjunto A_1, associaremos a série de potências $f_1(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$, onde as potências de x são justamente os valores viáveis para x_1. Da mesma maneira, podemos associar séries de potências $f_2(x)$ e $f_3(x)$ aos conjuntos A_2 e A_3, que também satisfazem

$$f_2(x) = f_3(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

já que $A_1 = A_2 = A_3$.

Olhemos agora para a série

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots).$$

Se expandirmos este produto, os termos que obteremos serão da forma $x^i x^j x^k$, onde x^i vem do primeiro fator no produto, x^j do segundo e x^k do terceiro. Para que esse termo seja igual a x^n, é preciso que $x^i x^j x^k = x^{i+j+k} = x^n$, isto é, $i + j + k = n$. Mas note que podemos enxergar essa tripla (i, j, k) com $i + j + k = n$ como a solução $x_1 = i, x_2 = j, x_3 = k$ da equação $x_1 + x_2 + x_3 = n$. Isso nos dá uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não-negativas de $x_1+x_2+x_3 = n$ e os termos $x^i x^j x^k$ na expansão do produto que são iguais a x^n. Portanto, o número de vezes que x^n aparece na expansão do produto acima é dado pelo número a_n de soluções inteiras não-negativas de $x_1+x_2+x_3 = n$. Em outras palavras, $f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e, para descobrir o valor de a_n, basta calcular $[x^n]f(x)$.

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3-1+n}{3-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n, \end{aligned}$$

temos que $a_n = [x^n]f(x) = \binom{n+2}{2}$. No caso particular em que $n = 9$, o número de soluções será $\binom{11}{2} = 55$.

Essa série $f(x)$ será dita a função geradora para o número a_n de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = n$.

Definição 2.1. *Seja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais. A função geradora (ordinária) dessa sequência é a série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Exemplo 2.2. Para a sequência $\{a_n\} = 1, 1, 1, \ldots$, temos a função geradora $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Para $\{b_n\}$, com $b_n = (-2)^n$, a função geradora é

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n = \frac{1}{1+2x},$$

enquanto que para $\{c_n\}$, com $c_n = 0$, se n é par, e $c_n = 1$, se n é ímpar, a função geradora é

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}.$$

Definição 2.3. *Sejam C um conjunto e $p : C \to \mathbb{N}$ uma função de C aos inteiros não-negativos. A função geradora (ordinária) de C com relação a p é a série*

$$f(x) = f_{C,p}(x) = \sum_{c \in C} x^{p(c)}.$$

A propriedade fundamental da função geradora $f_{C,p}$ é que

$$f_{C,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\{c \in C : p(c) = n\}| x^n,$$

isto é, o número de elementos c em C com $p(c) = n$ é dado por $[x^n]f(x)$. A função p é chamada de *função peso.*

Exemplo 2.4. Seja $C = \mathbb{N}^3$ e considere a função $p : C \to \mathbb{N}$ dada por $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. O coeficiente de x^n da função geradora $f_{C,p}(x)$ é o número de triplas (x_1, x_2, x_3) cuja soma é n, isto é, o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = n$.

Fica clara, portanto, a relação entre funções geradoras e problemas de contagem: o coeficiente de x^n na função geradora nos dá o número de elementos com peso n no conjunto dado. Porém, para que funções geradoras sejam uma ferramenta útil, será necessário encontrar formas de calculá-las sem resolver o problema de contagem diretamente.

Exemplo 2.5. Obtenha uma função geradora para o número de sequências binárias de comprimento n.

Seja C o conjunto de todas as sequências binárias. Seja p a função que associa a cada sequência o seu comprimento. A função geradora é dada por

$$f_{C,p} = \sum_{c \in C} x^{p(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde c_n é o número de sequências de comprimento n. Como sabemos que esse número é igual a 2^n, a função geradora será

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}.$$

Exemplo 2.6. Obtenha a função geradora para o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ para as quais x_1 é par, x_2 é maior do que quatro, x_3 é no máximo dois e não há restrições a x_4.

Seja C o conjunto de soluções com as propriedades do enunciado. Note que $A_1 = \{0, 2, 4, \ldots\}$, $A_2 = \{5, 6, 7, \ldots\}$, $A_3 = \{0, 1, 2\}$ e $A_4 = \mathbb{N}$ são os conjuntos de valores viáveis para cada uma das variáveis. Ao conjunto A_1, associamos a série $f_{A_1}(x) = x^0 + x^2 + x^4 + \ldots = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$. Do mesmo modo, associamos séries aos conjuntos A_2, A_3 e A_4: $f_{A_2}(x) = x^5 + x^6 + \ldots = \frac{x^5}{1-x}$, $f_{A_3}(x) = 1 + x + x^2$ e $f_{A_4}(x) = \frac{1}{1-x}$.

A função geradora desejada para o conjunto C (note que $C = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ com $p(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$) é dada por

$$f_C(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{x^5}{1-x}(1+x+x^2)\frac{1}{1-x} = \frac{x^5(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1-x)^2}.$$

Isso significa, por exemplo, se desejamos determinar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$ para as quais x_1 é par, x_2 é maior do que quatro, x_3 é no máximo dois e não há restrições a x_4, basta calcular o coeficiente de x^{23} na função geradora $f_C(x)$.

Para tanto, podemos usar frações parciais para determinar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2} &= \frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{1/8}{1+x} + \frac{1/8}{1-x} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/2}{(1-x)^3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}(n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{n+2}{2} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}(n+1) + \frac{1}{2}\binom{n+2}{2} \right) x^n.
\end{aligned}$$

O coeficiente de x^{23} em $f_C(x)$ é portanto

$$\begin{aligned}
[x^{23}]f_C(x) &= [x^{23}]\frac{x^5(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1-x)^2} = [x^{23}](x^5 + x^6 + x^7)\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} \\
&= [x^{18}]\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} + [x^{17}]\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} + [x^{16}]\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} \\
&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{19}{4} + \frac{1}{2}\binom{20}{2}\right) + \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{18}{4} + \frac{1}{2}\binom{19}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{17}{4} + \frac{1}{2}\binom{18}{2}\right) \\
&= 100 + 90 + 81 = 271.
\end{aligned}$$

Lema 2.7 (Lema da Soma)**.** *Sejam A e B conjuntos disjuntos, seja $C = A \cup B$ e seja p uma função peso em C. Então*

$$f_{C,p}(x) = f_{A,p}(x) + f_{B,p}(x).$$

Demonstração Sejam $f_{A,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f_{B,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ e $f_{C,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Por definição, a_n, b_n e c_n são os números de elementos em A, B e C, respectivamente, com peso n. Como A e B são disjuntos, é claro que $c_n = a_n + b_n$ para todo n, de forma que

$$f_{C,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f_{A,p}(x) + f_{B,p}(x),$$

estabelecendo o resultado. ∎

Uma conseqüência imediata disso é o seguinte resultado.

Corolário 2.8. *Sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *conjuntos disjuntos, seja* $C = \bigcup_{j=0}^{m} A_j$ *e seja* p *uma função peso em* C*. Então*

$$f_{C,p}(x) = \sum_{j=0}^{k} f_{A_j,p}(x).$$

Observação 2.9. A soma $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} f_{A_j,p}(x)$ está bem definida, se, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente de x^n é diferente de zero para um número finito de $f_{A_j,p}(x)$. Se esse é o caso, o corolário acima pode ser estendido para o caso $A_1, A_2, \ldots$.

Exemplo 2.10. Uma *composição* de um inteiro n em k fatores é uma k-upla de inteiros positivos cuja soma é n. Por exemplo, o conjunto de composições de 5 em três fatores é dado por

$$\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}.$$

O conjunto das composições de n é o conjunto que engloba as composições em k partes para todo k. Por convenção, assume-se que o inteiro zero tem uma composição, a *composição vazia.*

Seja C_k o conjunto de composições de inteiros em k partes. Para definirmos a função geradora para composições, consideraremos a função peso que associa cada composição à soma de suas coordenadas, de forma que uma composição de n tem peso n. Dado um inteiro k, a função geradora para o número de composições de n em k partes é exatamente o número de soluções positivas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. A função geradora para este número é

$$f_k(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)\cdots(x + x^2 + x^3 + \cdots) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k = \frac{x^k}{(1-x)^k},$$

pois todas as variáveis x_i na equação podem assumir valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto C de todas as composições de inteiros satisfaz $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$, e essa é uma união disjunta. Portanto, a função geradora para o número de composições de n é dada por

$$\begin{aligned} f_C(x) = f_{\bigcup C_k}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{C_k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-x)}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}. \end{aligned}$$

Para obtermos o número de composições de 15, basta calcularmos $[x^{15}]f_c(x)$. Mas esse número é igual a

$$[x^{15}]\frac{1-x}{1-2x} = [x^{15}](1-x)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = [x^{15}]\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+1}\right) = 2^{15} - 2^{14} = 2^{14}.$$

2.1. **Sequências Binárias.** O objetivo dessa seção é tratar de problemas de enumeração relacionados com sequências finitas compostas por dois símbolos, que aqui serão denotados por 0 e 1. A principal operação considerada entre duas sequências, digamos $a = 001011$ e $b = 1001$ é a *concatenação* de a e b, denotada por ab, que é simplesmente a sequência obtida pela justaposição dos elementos de a com os elementos de b, nesta ordem. No nosso exemplo, temos $ab = (001011)(1001) = 0010111001$.

Definição 2.11. *Para conjuntos de sequências A e B, a concatenação AB é o conjunto de sequências obtidas pela concatenação de elementos de A com elementos de B, isto é,*

$$AB = \{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

O conjunto AB é univocamente gerado se cada um de seus elementos é obtido de maneira única como concatenação de um elemento de A com um elemento de B.

Exemplo 2.12. Se $A = \{001, 10, 111\}$ e $B = \{0, 1, 11\}$ a concatenação AB é o conjunto $\{0010, 0011, 00111, 100, 101, 1011, 1110, 1111, 11111\}$. Note que nenhum elemento foi repetido na construção de AB, de forma que AB é univocamente gerado. Já no caso em que $A = \{01, 010, 1\}$ e $B = \{11, 010, 10\}$, temos

$$AB = \{0111, 01011, 111, 01010, 010010, 1010, 0110, 110\},$$

que não é univocamente gerado, pois o elemento 01010 pode ser gerado tanto como a concatenação (01)(010), quanto como a concatenação (010)(10).

Definição 2.13. *Dado um conjunto S, o conjunto S^* é o conjunto de todas as sequências finitas geradas pela concatenação de elementos de S, isto é,*

$$S^* = \{\epsilon\} \cup S \cup SS \cup SSS \cup \cdots = \bigcup_{i=0}^{\infty} S^i.$$

Exemplo 2.14.

- Se $S = \{0, 1\}$, S^* é o conjunto de todas as sequências binárias.
- Se $S = \{00, 1\}$, S^* é o conjunto de todas as sequências binárias em que todos os blocos de zeros (veja definição abaixo) têm comprimento par.

Definição 2.15. *Dada uma sequência binária s, uma* subsequência *de s é uma sequência binária cujos elementos aparecem consecutivamente em s. Os* blocos *de 0 e os blocos de 1 são subsequências maximais compostas unicamente de 0 ou unicamente de 1, respectivamente.*

Exemplo 2.16. Considere a sequência $s = 10001100001110$. Algumas das subsequências dessa sequência são 00110, 00, 1110 e 10, por exemplo. Os blocos de 0 são, em ordem de ocorrência, 000, 0000 e 0, enquanto que os blocos de 1 são, em ordem de ocorrência, 1, 11 e 111. Note que 00 é uma subsequência de s mas não é um bloco de s.

Definição 2.17. *Seja S um conjunto de sequências binárias. Dizemos que S^* é univocamente gerado se cada elemento de S^* pode ser representado de maneira única como concatenação de elementos de S.*

Exemplo 2.18.

- Se $S = \{0,1\}$, S^* é o conjunto de todas as sequências binárias finitas, pois toda sequência binária de comprimento k pode ser gerada em $\{0,1\}^k$ tomando o elemento apropriado em cada termo da concatenação. Também é verdade que S^* é univocamente gerado, uma vez que S^j e S^k são disjuntos para $j \neq k$ e os elementos de cada S^j são gerados de uma única maneira.
- Se $S = \{01, 101, 10, 11\}$, S^* não é univocamente gerado, pois 10101 pode ser gerado como (10)(101) e como (101)(01). Um outro exemplo é (101)(101) = (10)(11)(01).

Exemplo 2.19. Se $A = \{1\}^*$ e $B = \{0\}^*$, AB é univocamente gerado e gera o conjunto de todas as sequências em que 0's nunca são seguidos por 1's. Por outro lado, $A^2 = AA$ claramente não é univocamente gerado.

No que vem a seguir, contaremos sequências binárias com várias propriedades. Buscaremos funções geradoras $f_{C,p}(x)$, onde o conjunto de interesse C é um conjunto de sequências binárias e a função peso p é a função que associa a cada sequência o seu comprimento.

Exemplo 2.20. Considere os conjuntos

$$A = \{0, 000, 1, 101, 001, 1111\} \text{ e } B = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}.$$

A função geradora $f_A(x)$ para o número de sequências de comprimento n em A é $f_A(x) = 2x + 3x^3 + x^4$, pois há duas sequência de comprimento 1, três de comprimento 3 e uma de comprimento 4. Já a função geradora $f_B(x)$ para o número de sequências de comprimento n em B é dada por $f_B(x) = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$.

Note que o Lema da Soma da seção anterior também é válido nesse contexto. Se tivermos conjuntos disjuntos A e B de sequências binárias, a função geradora da união sstisfaz $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$.

Lema 2.21 (Lema da Concatenação)**.** *Sejam A e B conjuntos de sequências tais que AB é univocamente gerado. Sejam $f_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ e $f_{AB}x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ as funções geradoras para o número de sequências de comprimento n em A, B e AB, respectivamente. Então*

$$f_{AB}(x) = f_A(x) f_B(x).$$

Demonstração Se AB é univocamente gerado, então cada sequência de comprimento n em AB ae gerada de uma única maneira como a concatenação de uma sequência em A e de uma sequência em B.

Assim, qualquer sequência de comprimento n em AB é da forma $\alpha_i \beta_{n-i}$, onde α_i é uma sequência de comprimento i em A e β_{n-i} é uma sequência de comprimento $n-i$ em B. Para i fixo, o número de sequências distintas deste tipo é $a_i b_{n-i}$, pois há a_i sequências de comprimento i em A e b_{n-i} sequências de comprimento $n-i$ em B, e todas as concatenações possíveis geram sequências diferentes.

Concluímos que $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, de forma que

$$\begin{aligned} f_{AB}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = f_A(x) f_B(x). \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ∎

Lema 2.22 (Lema do Asterisco)**.** *Seja S um conjunto de sequências binárias tais que S^* é univocamente gerado e sejam $f_S(x)$ e $f_{S^*}(x)$ as funções geradoras para o número de sequências de comprimento n nesses dois conjuntos, respectivamente. Então*

$$f_{S^*}(x) = \frac{1}{1 - f_S(x)}.$$

Demonstração Note que

$$S^* = \{\epsilon\} \cup S \cup S^2 \cup \cdots = \bigcup_{k=0}^{\infty} S^k.$$

Como S^* é univocamente gerado, sabemos que cada S^k é univocamente gerado e que a uniã acima é disjunta. Seja $f_{S^k}(x)$ a função geradora de S^k.

Por definição, $f_{\{\epsilon\}}(x) = 1$, pois a sequência vazia tem comprimento 0, e, pelo Lema da Concatenação, $f_{S^k}(x) = f_S(x)^k$ para todo $k \geq 2$. O Lema da Soma implica que

$$\begin{aligned} f_{S^*}(x) &= f_{\{\epsilon\}}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{S^k}(x) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_S(x)^k \\ &= \frac{1}{1 - f_S(x)}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ∎

Exemplo 2.23. (a) Para $S = \{0, 1\}$, S^* é univocamente gerado. Logo, $f_{S^*}(x) = \frac{1}{1-f_S(x)}$ e, como $f_S(x) = x + x = 2x$, temos

$$f_{S^*}(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

(b) Encontre a função geradora das sequências binárias para as quais nenhum zero é seguido por um 1.

O conjunto de tais sequências é dado por $C = \{1\}^*\{0\}^*$. Logo,

$$\begin{aligned} f_C(x) &= f_{\{1\}^*}(x) f_{\{0\}^*}(x) \\ &= \frac{1}{1 - f_{\{1\}}(x)} \frac{1}{1 - f_{\{0\}}(x)} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Note que estamos usando o fato de que C é univocamente gerado e os Lemas da Concatenação e do Asterisco.

A seguir, nos preocuparemos em estabelecer decomposições unívocas básicas do conjunto de sequências binárias para derivarmos mais resultados.

Proposição 2.24. $\{0,1\}^* = \{1\}^*\{0\{1\}^*\}^*$*, sendo essa decomposição univocamente gerada. Analogamente,* $\{0,1\}^* = 1^*(01^*)^*$

Demonstração Provaremos tanto a igualdade dos dois conjuntos quanto a geração unívoca dos elementos do conjunto à direita na igualdade por indução no comprimento k na sequência.

O único elemento de $C' = \{1\}^*\{0\{1\}^*\}^*$ com comprimento 0 é ϵ, que só pode ser gerado como a concatenação de $\epsilon \in \{1\}^*$ com $\epsilon \in \{0\{1\}^*\}^*$.

Seja $k > 0$ e suponha que o resultado valha para sequências de comprimento menor do que k. Seja $s = s_1 s_2 \cdots s_k$ uma sequência binária de comprimento k.

Caso 1: $s_1 = 1$.

Esse caso é dividido em dois subcasos, o primeiro ocorrendo quando todos os elementos da sequência são iguais a zero e o segundo quando isso não for verdade. No primeiro caso, note que a sequência é gerada por C', bastando pegar a devida sequência de 1's em $\{1\}^*$. Além disso, a sequência é univocamente gerada, pois a esolha de qualquer elemento outro que ϵ em $\{0\{1\}^*\}^*$ geraria uma sequências contendo zeros. No segundo caso, seja $j = \min\{i : s_i = 0\} \geq 2$. Dividimos a sequência s em duas partes, $s' = s_1 \cdots s_{j-1} = 1 \cdots 1$ e $s'' = s_j \cdots s_k$. Por indução cada uma dessas sequências é univocamente gerada por C', com a primeira sendo claramente gerada por um elemento de $\{1\}^*$ concatenado com ϵ e a segunda por ϵ concatenada com um elemento de $\{0\{1\}^*\}^*$. Isso prova que s pode ser gerado em C' de forma única.

Caso 2: $s_1 = 0$.

Novamente, dividimos em dois subcasos, um quando existe um único zero na sequência e o segundo quando há mais do que um. O tratamento de cada um dos subcasos é similar ao Caso 1. (Tente fazer.)

Exemplo 2.25. Determine a função geradora para o número de sequências binárias de comprimento n em cada um dos seguintes casos.

(a) a sequência não contém a subsequência 000.

Usando a Proposição 2.24, o conjunto C de tais sequências pode ser decomposto como $C = (\epsilon, 0, 00)(1(\epsilon, 0, 00))^*$ com a propriedade de que cada elemento é representado univocamente.

Pelos Lemas da Concatenação e do Asterisco, temos

$$\begin{aligned} f_C(x) &= f_{(\epsilon,0,00)(1(\epsilon,0,00))^*}(x) \\ &= f_{(\epsilon,0,00)}(x)\frac{1}{1 - f_1(x) f_{(\epsilon,0,00)}(x)} \\ &= (1 + x + x^2)\frac{1}{1 - x(1 + x + x^2)} = \frac{1 + x + x^2}{1 - x - x^2 - x^3} \end{aligned}$$

(b) a sequência contém no máximo k 1's.

Usando a Proposição 2.24, o conjunto C de tais sequências pode ser decomposto como $C = 0^* \left[\bigcup_{j=0}^{k} (10^*)^j\right]$ com a propriedade de que cada elemento é representado univocamente.

Pelos Lemas da Soma, da Concatenação e do Asterisco, temos

$$\begin{aligned} f_C(x) &= f_{0^*\left[\bigcup_{j=0}^{k}(10^*)^j\right]}(x) \\ &= f_{0^*}(x)\sum_{j=0}^{k} f_{10^*}(x)^j \\ &= \frac{1}{1-f_0(x)}\sum_{j=0}^{k}\frac{f_1(x)^j}{(1-f_0(x))^j} \\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{(1-x)^j} = \frac{1}{1-x}\frac{1-x^{k+1}/(1-x)^{k+1}}{1-x/(1-x)} \\ &= \frac{(1-x)^{k+1}-x^{k+1}}{(1-2x)(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Também estamos usando o fato de que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a^j = \frac{a^{k+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$.

Proposição 2.26. $\{0,1\}^* = 1^*(00^*11^*)^*0^*$, *sendo essa decomposição univocamente gerada.*

A demonstração desse resultado usa argumentos similares aos da demonstração da Proposição 2.24 e será omitida.

Exemplo 2.27. Determine a função geradora para o número de sequências binárias de comprimento n em cada um dos seguintes casos.

(a) A sequência contém exatamente cinco blocos de zeros.

Usando a Proposição 2.26, o conjunto C de tais sequências pode ser decomposto como $C = 00^*(11^*00^*)^4 1^* \cup (11^*00^*)^5 1^*$ com a propriedade de que cada elemento é representado univocamente.

Pelos Lemas da Soma, da Concatenação e do Asterisco, temos

$$\begin{aligned} f_C(x) &= f_{00^*}(x) f_{11^*00^*}(x)^4 f_{1^*}(x) + f_{11^*00^*}(x)^5 f_{1^*}(x) \\ &= \frac{x}{1-x}\frac{x^8}{(1-x)^8}\frac{1}{1-x} + \frac{x^{10}}{(1-x)^{10}}\frac{1}{1-x} = \frac{x^9}{(1-x)^{11}} \end{aligned}$$

Logo, o número de tais sequências de comprimento n é

$$[x^n]\frac{x^9}{(1-x)^{11}} = [x^n]\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+10}{m}x^{m+9} = \binom{n+1}{n-9}.$$

(b) A sequência não tem subsequência 0011.

Usando a Proposição 2.24, o conjunto C de tais sequências pode ser decomposto como $C = 1^*(011^* \cup 000^*1)^*0^*$ com a propriedade de que cada elemento é representado univocamente.

Pelos Lemas da Soma, da Concatenação e do Asterisco, temos

$$f_C(x) = f_{1^*}(x)\frac{1}{1 - f_{011^*}(x) - f_{000^*1}(x)} f_{0^*}(x)$$
$$= \frac{1}{1-x}\frac{1-x}{1-x-x^2-x^3}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1-x-x^2-x^3)}$$

(c) O número de blocos é ímpar.

Usando a Proposição 2.24, o conjunto C de tais sequências pode ser decomposto como $C = 00^*(11^*00^*)^* \cup (11^*00^*)^*11^*$ com a propriedade de que cada elemento é representado univocamente.

Pelos Lemas da Soma, da Concatenação e do Asterisco, temos

$$f_C(x) = f_{00^*}(x)\frac{1}{1 - f_{11^*00^*}(x)} + \frac{1}{1 - f_{11^*00^*}(x)} f_{11^*}(x)$$
$$= 2\frac{x}{1-x}\frac{(1-x)^2}{1-2x} = \frac{2x-2x^2}{1-2x}.$$

Logo, o número a_n de sequências de comprimento n com um número ímpar de blocos é dado por

$$a_n = [x^n]\frac{2x-2x^2}{1-2x} = [x^n]\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1}x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1}x^{m+2}\right).$$

Concluímos que

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

Em particular, para $n \geq 2$, a metade das sequências de n elementos tem um número ímpar de blocos.