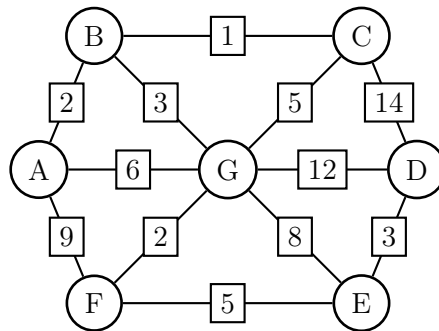


**MAT 1067 - COMBINATÓRIA II**  
**LISTA DE EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR**  
**10/06/2010**  
**DATA DE ENTREGA: 24/06/2010**

1. Uma empresa de energia elétrica está tentando identificar um problema nas suas linhas de transmissão. Para tanto, encaminhará uma equipe técnica para inspecionar toda a malha sob suspeita. As arestas do grafo abaixo indicam as linhas de transmissão sob suspeita, e os rótulos nas arestas indicam o tempo necessário, em minutos, para que a equipe percorra cada uma das linhas. Dado que os membros da equipe seguem em um único grupo partindo da central  $G$ , qual é o menor tempo necessário para que eles verifiquem todas as linhas de transmissão e retornem para a central? Que trajeto deve ser percorrido?



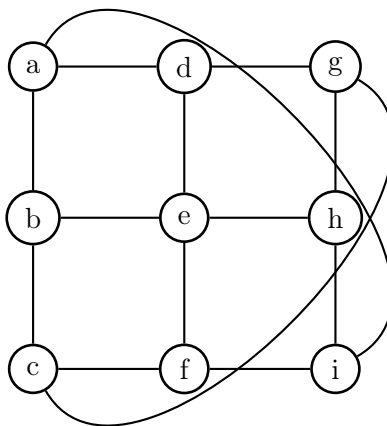
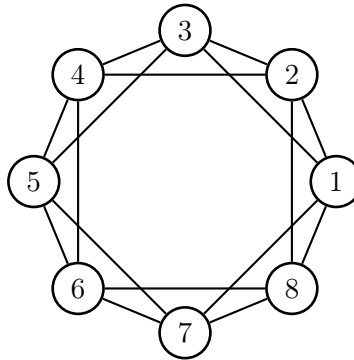
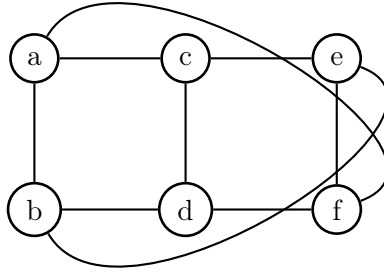
2. Considere o  $k$ -cubo  $G_k$  definido no exercício 3 da lista anterior.
- Mostre que, para  $k \geq 2$ , um  $k$ -cubo pode ser visto como a união de dois  $(k - 1)$ -cubos disjuntos, de tal forma que cada vértice em uma das cópias do cubo é ligado a exatamente um vértice da outra cópia.
  - Prove que  $G_k$  é hamiltoniano para todo  $k \geq 2$ . Dica: Use a decomposição do item (a) e indução em  $k$ .
3. Existem 18 pessoas participando de um encontro paracientífico sobre relacionamentos interpessoais. Um guru nessa área classifica a compatibilidade de relacionamento entre cada par de participantes como *energética positiva*, *energética negativa* ou *neutra*. Ele representa os resultados por um grafo  $G$  onde os vértices denotam as pessoas e há arestas entre quaisquer duas pessoas. O guru associa a cor verde a arestas ligando pessoas com energia positiva, a cor vermelha a arestas ligando pessoas com energia negativa e a cor amarela a arestas ligando pessoas mutuamente neutras. Na apresentação dos resultados, o guru gostaria de desenhar os grafos  $G_{verde}$ ,  $G_{vermelho}$  e  $G_{amarelo}$  (contendo as arestas verdes, vermelhas e amarelas, respectivamente) separadamente no plano, de tal forma que não haja cruzamento de arestas. Note que isso não é possível se todas as arestas forem verdes, por exemplo, já que nesse caso  $G_{verde} = K_{18}$ , e  $K_{18}$  não é planar. Existe alguma distribuição de cores para a qual isso é possível?
4. Seja  $G$  um grafo planar conexo que contenha um ciclo, e suponha que todo ciclo em  $G$  tenha comprimento pelo menos  $g$ . Se  $n$  e  $m$  denotam o número de vértices e arestas em  $G$ ,

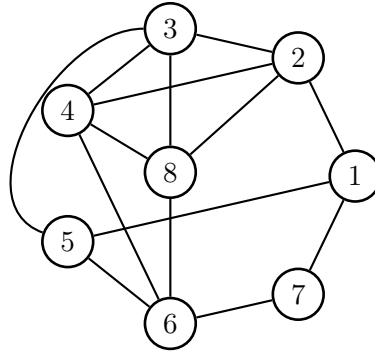
prove que

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Conclua que o grafo de Petersen não é planar.

5. Decida quais dos grafos abaixo são planares. Em cada caso, apresente uma representação planar do grafo ou prove que tal representação não existe.





6. Mostre que um grafo  $G$  é colorível com duas cores se e somente se  $G$  é bipartido.
7. Em uma semana de decisões ministeriais, é necessário organizar jornadas de trabalho para sete comitês com atribuições específicas. Dado que tais reuniões tendem a ser extensas, não é possível agendar duas delas para a mesma data. Além disso, requer-se que todos os membros de cada comitê participem da respectiva reunião, uma vez que decisões devem ser tomadas por unanimidade. Na tabela abaixo, estão marcadas por  $X$  as entradas  $(i, j)$  que correspondem a comitês  $C_i$  e  $C_j$  que têm algum membro em comum. Qual é o menor número de dias necessário para acomodar as sete jornadas de trabalho?

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
$C_1$	$X$	$X$	$X$	$X$		$X$	$X$
$C_2$	$X$	$X$	$X$				$X$
$C_3$	$X$	$X$	$X$	$X$			
$C_4$	$X$		$X$	$X$	$X$	$X$	
$C_5$				$X$	$X$	$X$	
$C_6$	$X$			$X$	$X$	$X$	$X$
$C_7$	$X$	$X$				$X$	$X$

- (a) Relacione esse problema com o problema de encontrar o número cromático de um grafo.
- (b) Resolva o problema. Além disso, determine qual é o maior número de comitês que podem se encontrar em uma determinada data?
8. Prove que um grafo planar sem ciclos de comprimento três possui um vértice cujo grau é no máximo três. Use esse fato para demonstrar que todo grafo nessa classe é 4-colorível. (Você não deve utilizar o Teorema das Quatro Cores.)