MAT 1067 - COMBINATÓRIA II
LISTA DE EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR
20/05/2010
DATA DE ENTREGA: 08/06/2010

1. Considere o grafo G com vértices respresentando os países da América do Sul. Dois vértices são adjacentes quando os países são fronteiriços.

(a) Dê uma representação gráfica de G e determine o seu grau máximo e o seu grau mínimo.
(b) O *diâmetro* de um grafo é a maior das distâncias entre dois de seus vértices. Qual é o diâmetro de G?
(c) É possível viajar pela América do Sul cruzando todas as fronteiras entre países uma única vez?
(d) É possível viajar pela América do Sul, com início e fim no Brasil, de forma que todos os países são visitados, e cada país é visitado uma única vez?

2. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Quando verdadeira, prove a afirmação, caso contrário dê um contraexemplo.

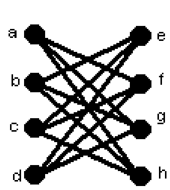
(a) Se todos os vértices de um grafo G têm grau igual a dois, então G é um ciclo.
(b) Se um grafo G tem um passeio de comprimento ímpar entre dois vértices u e v, então G contém um caminho de comprimento ímpar entre esses dois vértices.
(c) Se um grafo G tem um passeio fechado de comprimento ímpar, então G contém um ciclo de comprimento ímpar.
(d) Se um grafo G tem um passeio fechado de comprimento par, então G contém um ciclo de comprimento par.

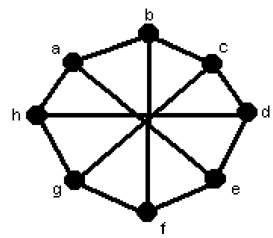
Para os próximos itens, é necessário introduzir um novo conceito : para um grafo $G = (V, A)$, o *grafo complementar* $G^c = (V, A^c)$ de G é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G, mas com conjunto de arestas dado por $A^c = \big\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\big\} \setminus A$.

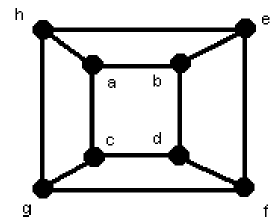
(e) $(G^c)^c = G$.
(f) Se G e H são isomorfos, então G^c e H^c são isomorfos.
(g) Se o grafo G é um ciclo, então o complementar G^c não é um ciclo.

3. Dado um inteiro positivo k, considere o grafo G_k cujos vértices são as sequências binárias de comprimento k. Dois vértices serão adjacentes quando as sequências se diferenciarem em exatamente uma posição. (Em particular, 001 e 011 são adjacentes em G_3, mas 100 e 001 não o são.)

1. Desenhe os grafos G_1, G_2 e G_3.
2. Calcule o número de vértices e o número de arestas de G_k.
3. Determine se G_k é bipartido.







4. Decida quais dos grafos acima estão na mesma classe de isomorfismo. Justifique.

5. Os vértices do grafo ímpar I_k são os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$ contendo exatamente k elementos. Dois vértices são adjacentes se e somente se forem conjuntos disjuntos.

1. Desenhe os grafos I_1 e I_2. Mostre que I_2 é isomorfo ao grafo de Petersen, que foi visto em aula.
2. Calcule o número de vértices e o número de arestas de I_k.
3. Prove que, para $k \geq 2$, o grafo I_k não tem ciclos de comprimento três ou quatro.

6. Dado um inteiro positivo k, seja G um grafo tal que todo vértice de G tem grau pelo menos k e todo ciclo em G tem comprimento pelo menos quatro. Prove que G tem pelo menos $2k$ vértices. Determine o conjunto de grafos G nessas condições que têm exatamente $2k$ vértices.

7. Prove que um grafo G contém um passeio euleriano se, e somente se, é conexo e no máximo dois de seus vértices têm grau ímpar.