MAT 1067 - COMBINATÓRIA II
LISTA DE EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR
03/05/2010
DATA DE ENTREGA: 11/05/2010

1. Prove que a função geradora para o número a_n de sequências binárias de comprimento n tais que os blocos de 0 têm comprimento múltiplo de 3 e os blocos de 1 têm comprimento múltiplo de 4 é dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3 - x^4}.$$

(a) Encontre uma relação de recorrência para a_n.
(b) Use o item (b) para determinar quantas das sequências do enunciado têm comprimento 12.

2. Resolva as seguintes relações de recorrência.

(a) $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 12a_{n-3}$ para $n \geq 3$, $a_0 = 5$, $a_1 = 7$ e $a_2 = 15$.
(b) $b_n - 6b_{n-1} + 11b_{n-2} - 6b_{n-3} = 6n^2 - 40n + 49$ para $n \geq 4$, $b_1 = 3$, $b_2 = 15$, $b_3 = 41$.
(c) $c_n = 5c_{n-1} - 6c_{n-2} + n2^n + 4^n$ para $n \geq 3$, $c_1 = 3$ e $c_2 = 33$.
(d) $d_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} d_i$ para $n \geq 2$, $d_0 = 0$ e $d_1 = 1$.

3. Uma torre de Hanói dupla contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. As regras de movimentação dos discos são as mesmas: há três pinos, um disco é movido de cada vez e é proibido colocar um disco sobre outro menor. Quantos movimentos são necessários para transferir a torre dupla de um eixo para outro?

4. Considere um conjunto de n retas no plano tais que quaisquer duas retas têm interseção, mas não há três retas com um ponto em comum. Essas retas dividem o plano em regiões. Encontre relações de recorrência para:

(a) ℓ_n, o número de regiões limitadas criadas;
(b) i_n, o número de regiões ilimitadas criadas.

Para cada número natural n, decida se ℓ_n ou i_n é maior.

5. Uma palavra criada a partir do alfabeto $\{A, B, C, D\}$ é *legítima* se a letra B aparece um número par de vezes. Ache uma relação de recorrência para a_n, o número de palavras legítimas de comprimento n, e resolva-a.

As seguintes séries de potências podem ser utilizadas sem prova.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } k \text{ real.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n, \text{ para todo inteiro positivo } k.$$