MAT 1067 - COMBINATÓRIA II
LISTA DE EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR
08/04/2010
DATA DE ENTREGA: 22/04/2010

1. Na moedeira de Daniel, há 19 moedas de um centavo, 39 moedas de 10 centavos e 9 moedas de 1 real. Seja a_n o número de maneiras de se obter um total de n centavos com as moedas acima.

(a) Mostre que a função geradora para a_n é igual a

$$(1+x^{10})(1+x^{100})(1+x^{200})(1-x^{1000})\frac{1}{1-x}.$$

(b) Use a função geradora anterior para determinar o número de maneiras em que Daniel pode obter R\$ $1,72$.

2. Uma *composição* de um inteiro n em k-fatores é uma k-upla de inteiros positivos cuja soma é n.

(a) Mostre que a função geradora para a sequência $\{d_n\}$, onde d_n é o número de composições de um inteiro n em um número ímpar de partes é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \frac{x(1-x)}{1-2x}.$$

(b) Determine o número de composições do número 20 em um número ímpar de partes.

(c) Mostre que a função geradora para a sequência $\{c_n\}$, onde c_n é o número de composições de um inteiro n em partes ímpares é dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Observação: Estamos supondo aqui que a partição de 0 em 0 partes não é uma partição de 0 em partes ímpares.

(d) Determine o número de composições do número 24 em partes ímpares.

3. Para cada um dos seguintes conjuntos de sequências binárias com os símbolos 0 e 1, encontre uma decomposição que crie os elementos de cada conjunto univocamente. Use essa decomposição para encontrar a função geradora para o número de sequências de comprimento n em cada um desses conjuntos. Lembre que, dada uma sequência binária s, uma *subsequência* de s é uma sequência binária cujos elementos aparecem consecutivamente em s. Os *blocos* de 0 e os blocos de 1 são subsequências maximais compostas unicamente de 0 ou unicamente de 1, respectivamente.

(a) o comprimento de cada bloco de 1's é múltiplo de 3;

(b) não há subsequência de 1's com comprimento 3, nem subsequência de 0's com comprimento 2;

(c) não há bloco de 1's com comprimento 3, nem bloco de 0's com comprimento 2;

(d) a subsequência 0111 não ocorre;

4. Para cada uma das decomposições abaixo, demonstre que as sequências são geradas univocamente, ou mostre que isso não é verdade.
   (a) $\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}(\{0,1\}^3)^*$;
   (b) $00^*(\{1, 11, 110\}\{00, 001\})^*(11)^*$.

5. Mostre, usando funções geradoras, que o número de partições de um inteiro positivo n em partes tais que cada parte par aparece no máximo uma vez (por exemplo, 28=1+1+2+3+5+5+5+6, 15=1+1+1+4+8 e 27=1+1+3+11+11) é igual ao número de partições de n em que cada parte aparece no máximo três vezes (por exemplo, 20=1+1+1+2+3+4+4+4).

6. Uma partição p de um inteiro n é autoconjugada se a partição conjugada de p é igual a p.
   (a) Prove que o número de partições autoconjugadas de um inteiro positivo n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.
   (b) Encontre a função geradora para o número de partições autoconjugadas de n.
   (c) Conclua a partir do item (b) que todo número inteiro diferente de 2 tem uma partição autoconjugada.
   (d) Use a função geradora do item (d) para determinar o número de partições autoconjugadas dos inteiros positivos entre 1 e 10.

7. A Biblioteca Central de uma universidade adquiriu n livros e deve distribuí-los entre três bibliotecas de unidade.
   (a) Ache a função geradora adequada para obter número de maneiras de distribuir esses livros se os livros são idênticos e cada unidade recebe pelo menos um livro.
   (b) Usando o item (a), determine o número de maneiras de se distribuir 21 livros nessas condições.
   (c) Ache a função geradora adequada para obter o número de maneiras de distribuir esses livros se os livros são todos distintos e cada unidade recebe pelo menos um livro.
   (d) Usando o item (c), determine o número de maneiras de se distribuir 21 livros nessas condições.
   (e) Agora, suponha que uma biblioteca recebeu livros de três tipos diferentes e queira colocá-los na prateleira. De quantas maneiras 15 desses livros podem ser ordenados no primeiro andar de uma prateleira sabendo que há pelo menos quinze livros de cada tipo?

As seguintes séries de potências podem ser utilizadas sem prova.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } k \text{ real.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n, \text{ para todo inteiro positivo } k.$$