MAT 1067 - COMBINATÓRIA II
LISTA DE EXERCÍCIOS 2
18/03/2010

1. Encontre os seguintes coeficientes das séries abaixo.

   (a) $[x^7]\dfrac{x}{1-2x^2}$ (b) $[x^8]\dfrac{1+x^3}{(1+x^2/2)^3}$

   (c) $[x^{10}]\dfrac{2}{3+6x^2}$ (d) $[x^n]\dfrac{x}{(2-x)(1+2x)}$

2. Sejam k e n inteiros positivos e considere a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Mostre que:

   (a) o número de soluções inteiras não-negativas desta equação é $\binom{n+k-1}{k-1}$;

   (b) o número de soluções inteiras positivas desta equação é $\binom{n-1}{k-1}$;

   (c) o número de soluções inteiras positivas desta equação em que pelo menos uma das coordenadas é ímpar é dado por $\binom{n-1}{k-1}$, se n é ímpar, e $\binom{n-1}{k-1} - \binom{n/2-1}{k-1}$, se n é par.

3. Uma *composição* de um inteiro n em k-fatores é uma k-upla de inteiros positivos cuja soma é n. Por exemplo, o conjunto de composições de 5 em três fatores é dado por

$$\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}.$$

   (a) Dado um inteiro k, mostre que a função geradora para a sequência $\{a_n\}$, onde a_n é o número de composições de um inteiro n em k partes é $f(x) = \frac{x^k}{(1-x)^k}$.

   (b) Mostre que a função geradora para a sequência $\{b_n\}$, onde b_n é o número de composições de um inteiro n é $f(x) = \frac{1-x}{1-2x}$

   (c) Qual é o número de composições de 15?

   (d) Encontre a função geradora para a sequência $\{c_n\}$, onde c_n é o número de composições de um inteiro n em partes ímpares.

   (e) Encontre a função geradora para a sequência $\{d_n\}$, onde d_n é o número de composições de um inteiro n em um número ímpar de partes.

4. Usando o fato de que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,, mostre que, para todo inteiro positivo k,

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

5. Use a expansão binomial $(1+x)^s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} x^n$ para demonstrar que, para todo inteiro positivo k,

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$