

MAT 1067 - COMBINATÓRIA II
LISTA DE EXERCÍCIOS 1
11/03/2010

1. Determine o número de funções de $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ em $B = \{1, \dots, 5\}$ satisfazendo cada uma das seguintes propriedades.
 - (a) A imagem de cada número ímpar é par.
 - (b) A função é injetora.
 - (c) A imagem de cada número menor do que 6 é inferior a 4.
 - (d) As propriedades de (a) e (c) são satisfeitas.
2. Seja A_n^k o número de arranjos de n elementos distintos tomados k a k . Prove que $A_n^k = n!/(n-k)!$.
3. Resolva os itens abaixo.
 - (a) Quantos números no conjunto $S = \{100, 101, \dots, 999\}$ são tais que pelo menos um dígito é igual a 3 ou 7?
 - (b) Quantos números no conjunto $I = \{1000, 1001, \dots, 9999\}$ têm pelo menos um dígito igual a 0, um dígito igual a 1 e um dígito igual a 2?
4. Seja X um conjunto com n elementos. Quantos pares ordenados (A, B) satisfazem $A \subseteq B \subseteq X$?
5. Prove que todo conjunto não-vazio tem o mesmo número de subconjuntos de cardinalidade par e ímpar, supondo que o conjunto vazio tem cardinalidade par. Utilize esse fato para concluir que $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$, onde $\lfloor n/2 \rfloor$ é o *piso* de $n/2$, isto é, o maior inteiro menor ou igual a $n/2$.
6. Prove que $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ das duas seguintes maneiras:
 - (a) por indução em $n \geq m$;
 - (b) contando os subconjuntos de $m+1$ elementos em $\{1, \dots, n+1\}$. (Dica: quantos desses conjuntos têm maior elemento igual a $k+1$?)