MAT 1066 - COMBINATÓRIA I
LISTA DE EXERCÍCIOS 8
18/06/2010

1. Quantas pessoas devem estar em um conjunto para garantirmos que:

   (a) os nomes de duas delas começam com a mesma letra;
   (b) duas fazem aniversário no mesmo dia;
   (c) duas têm os mesmos quatro dígitos finais no CPF.

   Quais seriam as respostas se exigíssemos que pelo menos três pessoas tivessem a propriedade desejada?

2. Se meias de cinco pares diferentes estão misturadas em uma gaveta, quantas delas devemos retirar para garantir que haja pelo menos um par entre as meias retiradas?

3. Um restaurante possui 62 mesas com um total de 314 cadeiras. É possível garantir a existência de uma mesa com seis ou mais cadeiras? É possível garantir a existência de uma mesa com sete ou mais cadeiras?

4. Uma assistente social tem 77 dias para realizar visitas a famílias carentes. Ela pretende fazer pelo menos uma visita por dia, e tem que realizar 132 visitas no total. Existe um período de dias consecutivos em que ela realiza exatamente 15 visitas? Qual é o maior número de visitas em dias consecutivos que você pode garantir usando o Princípio da Casa dos Pombos?

5. Um computador é utilizado 300 horas em um período de 15 dias. Mostre que, em um período de três dias consecutivos, o computador foi utilizado por 60 ou mais horas.

6. Encontre subsequências crescentes e decrescentes máximas em cada uma das sequências abaixo e verifique que as suas conclusões satisfazem o Teorema de Erdős-Szekeres.

   (a) 5,3,8,2,1;
   (b) 7,6,8,1,2,5,9,11,14,4;
   (c) 6,11,3,9,4,13,15,18,10,8;

7. Dé um exemplo de uma sequência de 25 inteiros distintos tal que não existem subsequências crescentes ou decrescentes com 6 elementos.

8. Mostre que 11 divide infinitos números da forma $363636\ldots36$.

9. Em uma companhia, existem 25 executivos que são auxiliados por um corpo secretarial de 12 pessoas. A cada hora, um certo grupo de executivos busca auxílio secretarial, mas nunca ocorre que mais do que 12 executivos busquem auxílio em uma mesma hora. Cada membro do corpo secretarial tem uma lista dos executivos para os quais trabalha, e todos os executivos estão em pelo menos uma dessas listas. Se somarmos o número de executivos em cada lista, o total é 95. Mostre que é possível que, em algum momento, um executivo não possa ser atendido pelo corpo secretarial.

10. Para um inteiro positivo n, seja $X \subset \{1, \ldots, 2n+1\}$ com $|X| = n+2$, e suponha que o maior elemento de X é m. Nesse exercício, queremos mostrar que existem $i, j \in X$ tais que

$i \neq j$ e $i + j = m$. Para cada elemento $k \in X \setminus \{m\}$, defina

$$f(k) = \begin{cases} k, & \text{se } k \leq \frac{m}{2} \\ m - k, & \text{se } k > \frac{m}{2} \end{cases}$$

(a) Quantos elementos estão no domínio da função f?
(b) Mostre que o conjunto imagem de f estã contido no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.
(c) Conclua que existem $i, j \in X$ tais que $i \neq j$ e $i + j = m$.

11. Nesse exercício, desejamos mostrar que, em um grupo de 10 pessoas, há pelo menos duas tais que a diferença ou a soma das suas idades é divisível por 16. Sejam $a_1, \ldots, a_{10}$ as idades das pessoas no grupo. Para cada $1 \leq i \leq 10$, seja $r_i = a_i \bmod 16$ e considere

$$s_i = \begin{cases} r_i, & \text{se } r_i \leq 8 \\ 16 - r_i, & \text{se } r_i > 8 \end{cases}$$

(a) Mostre que todos os elementos s_i satisfazem $0 \leq s_i \leq 8$.
(b) Mostre que, se existem k e j distintos tais que $s_j = r_j = s_k = r_k$ ou $s_j = 16 - r_j = s_k = 16 - r_k$, então 16 divide $a_j - a_k$.
(c) Mostre que, se existem k e j distintos tais que $s_j = r_j = s_k = 16 - r_k$ ou $s_j = 16 - r_j = s_k = r_k$, então 16 divide $a_j + a_k$.
(d) Conclua que há pelo menos duas pessoas no grupo tais que a diferença ou a soma das suas idades é divisível por 16.