MAT 1066 - COMBINATÓRIA I
LISTA DE EXERCÍCIOS 6
06/05/2010

1. Três jornais, o Diário, a Tribuna e a Folha de Notícias são publicados em uma cidade. Os seguintes resultados foram obtidos em uma pesquisa com a população adulta da cidade: 25% leem o Diário, 24% leem a Tribuna e 20% leem a Folha de Notícias. Além disso, soube-se que 6% leem os dois primeiros, 8% leem o primeiro e o terceiro e 6% leem os dois últimos. Sabendo que 4% leem os três jornais, responda às perguntas abaixo.

   (a) Qual é a porcentagem da população que não lê jornais locais?
   (b) Um estudo também revelou que a influência política de um jornal é diretamente proporcional ao seu número de leitores exclusivos, isto é, ao número de leitores que só leem esse jornal. Seguindo esse critério, qual dos jornais da cidade tem maior influência política?

2. Quantos números inteiros entre 1 e 1000:

   (a) são divisíveis por 3, por 5 ou por 8?
   (b) não são divisíveis por 2, nem por 5, nem por 7?
   (c) são divisíveis por 4, por 6 ou por 9?

3. De quantas maneiras podemos repartir 9 objetos diferentes em 4 caixas diferentes de forma que nenhuma caixa fique vazia? Compare a sua resposta com o caso em que:

   (a) os objetos são todos distintos, mas as caixas são iguais;
   (b) os objetos são iguais, mas as caixas são distintas.

4. Use o princípio da inclusão-exclusão para contar o número de maneiras em que se pode escolher

   (a) oito frutas de um conjunto de 3 laranjas idênticas, 3 figos idênticos e 4 maçãs idênticas;
   (b) doze frutas de um conjunto de 5 laranjas idênticas, 5 figos idênticos e 5 maçãs idênticas.

5. Após o sucesso de seu último evento social, a embaixatriz brasileira em Roma resolveu organizar um jantar de reencontro, para o qual, juntamente com seu marido, convidou 11 casais. Para a sala de eventos da embaixada, ela encomendou três mesas redondas diferentes, cada uma com oito lugares. De quantas maneiras os convidados podem ser dispostos nas mesas se

   (a) quatro casais se sentam em cada mesa, e marido e mulher não se sentam lado-a-lado;
   (b) quatro casais se sentam em cada mesa, homens e mulheres estão intercalados em cada mesa, e marido e mulher não se sentam lado-a-lado.

6. Resolva os problemas abaixo.

   (a) Determine o número de anagramas de AABBCCC para os quais duas letras idênticas nunca estão em posições consecutivas.
   (b) Um grupo de turistas, dois italianos, dois alemães, dois japoneses e dois coreanos estão em fila, à espera do trem que os levará ao Cristo Redentor. De quantas maneiras eles podem estar dispostos se pessoas da mesma nacionalidade não estão em posições consecutivas?

(c) Generalize a sua resposta anterior para $2n$ turistas de n nacionalidades diferentes, sendo dois de cada nacionalidade.

7. Um grupo de quatro senhoras foi ao teatro. Elas deixaram os seus casacos na chapelaria, e uma das senhoras guardou os comprovantes. Ao final da peça, essa senhora entregou um comprovante qualquer para cada uma das outras. De quantas maneiras isso poderia ter sido feito se nenhuma senhora recebeu o comprovante referente ao seu casaco? E se apenas uma senhora recebeu o comprovante referente ao seu casaco? Generalize a sua resposta para um grupo de n senhoras.

8. Quantas permutações de $1, 2, \ldots, n$ são tais que o número i nunca está na posição $i+1$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Por exemplo, as permutações 1234 e 3412 satisfazem essa propriedade, enquanto que 2134 e 3421 não a satisfazem.

9. Todo inteiro positivo n pode ser escrito de uma única maneira como produto de potências de primos

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m},$$

onde $p_1, \ldots, p_m$ são distintos e $e_i \geq 1$ para todo i. Por exemplo, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $12 = 2^1 \cdot 3^2$ e $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. A função de Möbius $\mu(n)$ é definida por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } e_i > 1 \text{ para algum i}, \\ (-1)^m, & \text{se } e_1 = e_2 = \ldots = e_m = 1. \end{cases}$$

(a) Calcule $\mu(22)$, $\mu(30)$ e $\mu(100)$.

(b) Mostre a partir do princípio de inclusão-exclusão que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

A soma acima é tomada para todos os inteiros d que dividem n. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \sum_{d|12} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(6) + \mu(12) \\ &= 1 + (-1) + (-1) + 0 + 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(c) Suponha que f e g são funções tais que $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ para todo n. Use a parte (b) para mostrar que

$$g(n) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d).$$

(d) Lembre que a função ϕ de Euler satisfaz $n = \sum_{d|n} \phi(d)$. Conclua que

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

(e) Mostre que, para todo primo p e todo inteiro positivo c, temos $\phi(p^c) = p^c \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.