MAT 1066 - COMBINATÓRIA I
LISTA DE EXERCÍCIOS 5
08/04/2010

1. Ache o coeficiente da potência dada em cada uma das seguintes expansões:
   (a) coeficiente de x^5 em $(2-3x)^7$;
   (b) coeficiente de x^{19} em $(2x^4+3x)^7$;
   (c) coeficiente de x^8 em $(1+x)^5(2-x)^3$.

2. Demonstre a identidade binomial

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

válida para $0 \le k \le n+1$. Diferentemente do que foi feito em aula, use a definição de coeficiente binomial para os termos do lado direito para obter a expressão no lado esquerdo.

3. Demonstre as seguintes identidades binomiais.
   (a) $\displaystyle\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} = 2^{2n-2}$;
   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

4. O coeficiente de Cohen é definido como

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}.$$

Demonstre que tal coeficiente satisfaz a identidade

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle.$$

5. Demonstre a validade da Convolução de Vandermonde, definida a seguir para quaisquer inteiros não-negativos n, m, p com $n \ge p$:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-p}{m-k}\binom{p}{k} = \binom{n}{m}.$$

Dica: Tente relacionar essa equação com o problema de criar comissões de m membros escolhidos dentre n candidatos, p dos quais são mulheres.

6. Estabeleça a validade da identidade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m-1}{k} = \binom{m+n}{m}$$

de duas maneiras diferentes: uma por indução e uma relacionando-a com o problema de determinar o número de caminhos do extremo inferior esquerdo ao extremo superior direito em uma grade com m células horizontais e n células verticais.

7. Seja $S(n,k)$ o número de Stirling do segundo tipo de n tomado k a k, conforme definido em aula. Prove que $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0} k(-1)^k\binom{k}{i}(k-i)^n$ usando a definição de $S(n,k)$ e o fato de que $S(n,k)$ satisfaz a relação de recorrência $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.

8. Mostre por um argumento combinatório que

$$S(n+1,k) = \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1).$$