**Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC**
31-maio a 3-junho-2004
UNESP - Campus de Ilha Solteira

# Observadores Funcionais para Sistemas de Primeira Ordem Generalizados

**João Batista da Paz Carvalho**, **Julio Cesar Claeyssen**,
Depto de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS,
91509-900, Porto Alegre, RS
E-mail: carvalho@mat.ufrgs.br, julio@mat.ufrgs.br

## Resumo

Uma abordagem importante no contexto de implementação de mecanismos de controle por realimentação em sistemas de primeira ordem é a construção de observadores funcionais; eles têm a propriedade de estimar o vetor de realimentação diretamente, sem estimar a variável de estado. Nesse trabalho apresentamos um método para construção de observadores funcionais para sistemas de primeira ordem generalizados. Exemplos numéricos da construção dos parâmetros dos observadores para tais sistemas são apresentados.

## Palavras-chave

controle, observadores, estimação , estado

## Introdução

Uma das abordagens mais usadas para representar um sistema dinâmico matematicamente é a chamada abordagem via variáveis de estado. Um modelo contínuo generalizado de primeira ordem tem a forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

onde $E, A, B$ e $C$ são matrizes constantes e $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de estado, saída e entrada, respectivamente. A matriz $E$ será assumida não singular.

No caso particular em que $E$ é a matriz de identidade, o sistema se escreve na forma clássica

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{2}$$

No contexto de controle de sistemas (2) via realimentação de estado, é necessária a implementação de uma lei de controle

$$u(t) = v(t) - Kx(t), \tag{3}$$

onde o vetor $v(t)$ representa uma acão de controle externa ao sistema, o vetor $Kx(t)$ representa a realimentação usando a variável de estado, e $K$ é a matriz de realimentação (*feedback*) a ser encontrada pelo projetista do mecanismo de controle.

Quando não temos acesso as variáveis de estado de nosso sistema, entra em cena o teoria de *estimação de estado*, que fundamenta a contrução de um sistema observador

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + XBu(t) \tag{4}$$

com a propriedade que $z(t) \to Xx(t)$ ao $t \to \infty$, onde $X$ é uma solução da equação do Observador de Sylvester

$$XA - FX = GC \tag{5}$$

para alguma matriz estável $F$. Dessa forma uma estimativa $\hat{x}(t)$ para o vetor de estado $x(t)$ pode ser calculada resolvendo o sistema algébrico:

$$\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

no caso de um sistema observador de ordem reduzida [6]. A abordagem acima foi recentemente generalizada para sistemas governados por (1) através da solução da equação do Observador Generalizado de Sylvester [4]. Entretanto, um dos grandes problemas que ainda persistem é que o sistema (6) pode ser extremamente mal condicionado, trazendo sérias limitações à essa abordagem. Essa é a grande motivação para o desenvolvimento de observadores funcionais [4], cuja estratégia básica é estimar diretamente o vetor $Kx(t)$, sem estimar o vetor de estado $x(t)$.

Nesse trabalho, apresentamos um algoritmo para construção de observadores funcionais para sistemas lineares governados por (1) através da generalização do algoritmo proposto em [4] para o caso $E = I$, e como uma aplicação do conceito de solução generalizada proposto em [5].

## Solução Generalizada e Matriz de Observabilidade

Recentemente, um algoritmo para construção de observadores funcionais foi proposto em [4] para sistemas governados por (2). A estratégia básica proposta é a construção , por blocos, de um tripla de soluções $(X, F, G)$ da equação do Observador de Sylvester (5) com a propriedade adicional

$$X_1 = K - G_1 C \tag{7}$$

onde $X_1$ e $G_1$, com as dimensões adequadas, são blocos que formam as matrizes $X$ e $G$, respectivamente. Na construção proposta, é fundamental o papel da matriz de observabilidade

$$O = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T . \tag{8}$$

Na generalização do algoritmo para sistemas governados por (1), faz-se então fundamental a determinação da correspondente matriz de observabilidade.

Sendo $E$ não -singular e seguindo [5], a solução generalizada de (1) satisfaz

$$\begin{array}{l} E\dot{D}(t) = AD(t) \\ ED(0) = I \end{array} \tag{9}$$

onde $I$ denota a matriz identidade de dimensão $n$. Assim, a solução geral de (1) escreve-se em termos da solução generalizada como

$$x(t) = D(t)Ex(0) + D(t)\int_0^t D(-s)Bu(s)ds. \tag{10}$$

Além disso, a solução generalizada pode ser representada por

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k t^k}{k!} \tag{11}$$

onde

$$\begin{array}{l} ED_0 = I \\ ED_{k+1} = AD_k, k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \tag{12}$$

ou então , como uma consequência do Teorema de Cayley-Hamilton, existem funções $\beta_k(t), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ tais que

$$D(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(t) D_k . \tag{13}$$

Dessa forma, fazendo $u \equiv 0$ em (10), temos, após sucessivas derivações ,

$$\begin{array}{lr} y(0) = & CD_0Ex(0) \\ y'(0) = & CD_1Ex(0) \\ y''(0) = & CD_2Ex(0) \\ \dots = & \\ y^{(n-1)}(0) = & CD_{n-1}Ex(0) \end{array}$$

Assim temos

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_{n-1}E \end{bmatrix} x(0) \tag{14}$$

e então a matriz de observabilidade do sistema é

$$O_E = \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_{n-1}E \end{bmatrix} . \tag{15}$$

Generalizando resultados clássicos devido a **Kalman**, pode-se mostrar que a maximalidade do posto da matriz $O_E$ é uma condição necessária e suficiente para a observabilidade do sistema (1).

## Um Observador Funcional Generalizado

Sejam $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ , $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sob a hipótese que o sistema (1) é observável.

Nossa estratégia será construir uma solução $(X, F, G)$ de

$$XA - FXE = GC \tag{16}$$

com a propriedade adicional

$$K = X_1E - G_1C \tag{17}$$

para alguma matriz $G_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ a ser determinada.

Para tal, nos propomos a construir uma solução da forma

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_s \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} F_{11} & I & & \\ & F_{22} & I & \\ & & \cdots & I \\ & & & F_{ss} \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \cdots \\ G_{s+1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

e $X_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F_{ii} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ , $G_{i+1} \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

Dois tipos de observador funcional podem então ser construídos. O resultado principal comum é que

$$z(t) - XEx(t) \to 0 \quad \text{ao } t \to \infty \tag{19}$$

onde $(X, F, G)$ é uma solução de (16) e $z$ é a variável de estado do sistema (4), chamado de *sistema observador*.

**Observador de Ordem Reduzida.**

Assumindo $r = m$ (isto é, que o número de entradas é igual ao número de saídas) e $n-r = s{\cdot}m$, onde $s$ é um inteiro positivo, soluções $X \in \mathbb{R}^{(n-r)\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ e $G \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ de (16), onde $F$ é uma matriz estável, podem ser construídas.

**Observador de Ordem Integral.**

Assumindo $n = s \cdot m$, onde $s$ é um inteiro positivo, soluções $X \in \mathbb{R}^{n\times n}, F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times r}$ de (16), onde $F$ é uma matriz estável, podem ser construídas.

Dessa forma, em qualquer um dos casos,

$$Kx(t) = X_1Ex(t) - G_1Cx(t) \tag{20}$$

e como consequência de (19),

$$Kx(t) - (z_m(t) - G_1y(t)) \to 0 \quad \text{ao } t \to \infty, \tag{21}$$

onde $z_m$ contém as primeiras $m$ componentes do vetor $z$.

Substituindo (18) em (16) resulta

$$X_1E = K - G_1C \tag{22}$$
$$X_{i+1}E = X_iA - F_{ii}X_iE - G_{i+1}C, \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1) \tag{23}$$
$$0 = X_{s+1} = X_sA - F_{ss}X_sE - G_{s+1}C. \tag{24}$$

Pós-multiplicando as equações acima por $D_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, e combinando recursivamente, permite-nos estabelecer o seguinte resultado:

**Lema 0.1** *Para $i = 1, 2, \ldots, s+1$, $j = 0, 1, \ldots, s+1$, temos*

$$X_iED_j = K_{ij} - \sum_{\ell=0}^{i-1} G_{i\ell}CD_{j+\ell} \tag{25}$$

*onde*

$$K_{i+1,j} = K_{i,j+1} - F_{ii}K_{ij} \tag{26}$$
$$G_{i+1,j} = G_{i,j-1} - F_{ii}G_{ij} \tag{27}$$

*e*

$$K_{1j} = KD_j \tag{28}$$
$$G_{i,-1} = G_{i+1}, G_{i+1,i} = G_{i,i-1} \tag{29}$$

**Prova:** Por indução em $i$. Para $i = 1$, temos

$$X_1ED_j = (K - G_1C)\, D_j = K_{1j} - G_{10}CD_j$$

onde

$$K_{1j} = KD_j, G_{10} = G_1.$$

Por hipótese de indução , assume que (25) vale para $i = m$. Temos então

$$X_{m+1}ED_j = (X_mA - F_{mm}X_mE - G_{m+1}C)\, D_j = X_mED_{j+1} - F_{mm}X_mED_j - G_{m+1}CD_j$$

e assim

$$X_{m+1}ED_j = K_{m,j+1} - \sum_{\ell=0}^{m-1} G_{m\ell}CD_{j+1+\ell} - F_{mm}\left(K_{mj} - \sum_{\ell=0}^{m-1} G_{m\ell}CD_{j+\ell}\right) - G_{m+1}CD_j$$
$$X_{m+1}ED_j = K_{m,j+1} - F_{mm}K_{mj} - \sum_{\ell=1}^{m} G_{m,\ell-1}CD_{j+\ell} + \sum_{\ell=0}^{m-1} F_{mm}G_{m\ell}CD_{j+\ell} - G_{m+1}CD_j$$
$$X_{m+1}ED_j = K_{m+1,j} - (G_{m+1} - F_{mm}G_{m0})CD_j - \sum_{\ell=1}^{m-1} (G_{m,\ell-1} - F_{mm}G_{m\ell})\, CD_{j+\ell}$$

e usando (26)-(29) temos

$$X_{m+1}ED_j = K_{m+1,j} - \sum_{\ell=0}^{m} G_{m+1,\ell}CD_{j+\ell}$$

conforme queríamos mostrar. □

Usando (24) e (25) temos então

$$0 = X_{s+1}ED_0 = K_{s+1,0} - \sum_{\ell=0}^{s} G_{s+1,\ell}CD_\ell$$

ou seja,

$$K_{s+1,0}E = \begin{bmatrix} G_{s+1,0} & G_{s+1,1} & \dots & G_{s+1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_sE \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Observamos que a matriz de coeficientes do sistema de equações lineares acima tem dimensão $r(s+1) \times n$. No caso de um observador de ordem reduzida, como assumimos $r = m$, essa matriz será quadrada. No caso de um observador integral, se $r > m$, o sistema terá mais incógnitas do que equações e então técnicas usando Decomposição em Valores Singulares (SVD) podem ser usadas para encontrar solução para esse sistema.

Uma observação importante, bastante verificada na prática, é que esse sistema linear pode ser extremamente mal-condicionado; entretanto, tal se traduz numa propriedade relativa à observabilidade do sistema, sobretudo no que toca ao posicionamento de seus sensores.

Uma vez encontrada uma solução para (30), usamos (27) e (29) para calcular recursivamente $G_1, G_2, \dots, G_{s+1}$. Após, usamos (22) e (23) para calcular $X_1, X_2, \dots, X_s$.

## 0.1 Um Algoritmo para Construção dos Parâmetros do Observador

**Entrada:** Matrizes $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, onde $r = m$.
**Saída:** Matrizes $X, F, G$ e $G_1$ tais que $XA - FXE = GC$ e $K = X_1E - G_1C$.
**Hipótese:** O sistema é observável.

**1.** Dependendo da escolha de um observador de ordem reduzida ou não , encontre o parâmetro $s$ adequado. Observador de ordem reduzida requer $r = m$.

**2.** Calcule $D_0, D_1, \dots, D_{s+1}$ resolvendo os sistemas lineares

$$ED_0 = I \ , \ ED_{i+1} = AD_i, i = 0, 1, 2, \dots, s$$

onde $I$ denota a matriz identidade de dimensão $n$.

**3.** Determine os blocos $F_{ii}, i = 1, 2, \dots, s$ convenientemente, mas de tal forma que a matriz $F$ tenha autovalores com parte real negativa.

**4.** Calcule $K_{1j} = KD_j, j = 0, 1, 2, \dots, s$. Para $i = 1, 2, \dots, s$, calcule

$$K_{i+1,j} = K_{i,j+1} - F_{ii}K_{ij}, j = 0, 1, 2, \dots, s - i.$$

**5.** Encontre uma solução para o sistema linear

$$K_{s+1,0}E = \begin{bmatrix} G_{s+1,0} & G_{s+1,1} & \dots & G_{s+1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_sE \end{bmatrix}$$

nas incógnitas matriciais $G_{s+1,0}, \dots, G_{s+1,s}$.

**6.** Defina $G_1 = G_{s+1,s}$ e calcule

$$\begin{array}{l} G_{i,i-1} = G_{i+1,i} \\ G_{i,j-1} = G_{i+1,j} + F_{ii}G_{ij}, j = i-1, i-2, \dots, 1 \\ G_{i+1} = G_{i+1,0} + F_{ii}G_{i,0} \end{array} \quad (31)$$

para $i = s, s-1, \dots, 2, 1$ .

**7.** Calcule $X_1, X_2, \dots, X_s$ a partir dos sistemas lineares

$$\begin{array}{l} X_1E = K - G_1C \\ X_{i+1}E = X_iA - F_{ii}X_iE - G_{i+1}C, i = 1, 2, \dots, s-1. \end{array}$$

**8.** Forme as matrizes $X$, $F$ e $G$ a partir dos blocos calculados acima.

# Exemplos Numéricos

**Exemplo 1:** Considere o problema de controle, por realimentação de estado

$$u(t) = v(t) - K_1x(t) - K_2\dot{x}(t),$$

de um sistema de vibrações não -amortecidas

$$\begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = B_0u(t) \\ y(t) = C_1x(t) + C_2\dot{x}(t) \end{array}$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} .1621 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & .1621 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & .1621 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & .0797 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & .0797 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & .0797 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 31.431 & 0. & 0. & -8.686 & 5.634 & 0. \\ 0. & 107.290 & 0. & 5.634 & -3.655 & 0. \\ 0. & 0. & 14.06 & 0. & 0. & 0. \\ -8.686 & 5.634 & 0. & 56.945 & -5.634 & 0. \\ 5.634 & -3.655 & 0. & -5.634 & 3.655 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 4.986 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0.1000 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.1000 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.1000 & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$C_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0.1000 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0590 & -0.0678 \\ 0.0358 & 0.6454 & -0.8149 \\ -0.0028 & -0.0087 & -0.0599 \\ 0.0007 & 0.1640 & -0.0732 \\ -0.0009 & -0.0388 & 0.0428 \\ 0.0203 & -0.0053 & 0.1030 \end{bmatrix}^T$$

$$Z_2 = 10^{-1} \begin{bmatrix} -0.0200 & 0.0431 & -0.1381 \\ -0.1962 & -0.0224 & 0.2677 \\ 0.0011 & -0.0225 & -0.0769 \\ -0.0056 & -0.0256 & 0.0069 \\ 0.0015 & 0.0110 & -0.0418 \\ 0.0019 & -0.0069 & 0.0264 \end{bmatrix}^T$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 750. & 0. & 0. \\ 230. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 340. \\ 0. & 460. & 0. \\ 0. & 0. & 200. \\ 210. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Esse sistema é então escrito na forma (1), onde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} C_2 & C_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

e ainda

$$K = \begin{bmatrix} K_2 & K_1 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo proposto constrói matrizes $X = \begin{bmatrix} X_e & X_c & X_d \end{bmatrix}$, $F$, $G_1$ e $G$ tais que

$$X_e = \begin{bmatrix} 36.116 & 12.831 & -0.227 & 0.009 \\ 38.191 & 11.724 & 0.740 & 2.058 \\ -100.104 & -34.848 & -2.141 & -0.919 \\ 3198.954 & -460.496 & 5.254 & -50698.674 \\ 3769.647 & -535.307 & -6.424 & -54904.629 \\ -8470.822 & 1541.186 & 127.524 & 140606.906 \\ -48827.556 & 5036.965 & -48.303 & -415591.689 \\ -66441.912 & 6697.898 & -6.771 & -466661.598 \\ 174207.629 & -20428.207 & -1771.544 & 712024.673 \end{bmatrix}$$

$$X_c = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.255 & -0.012 & -0.121 \\ -0.487 & -0.067 & 0.027 & -0.014 \\ 0.537 & 1.293 & -0.085 & 0.165 \\ 4014.779 & 27.053 & 36.091 & 12.589 \\ 4816.024 & -100.758 & 38.297 & 11.669 \\ -11536.921 & 231.181 & -100.615 & -33.857 \\ -82000.781 & -480.235 & 3487.683 & -359.783 \\ -104851.133 & -57.956 & 4152.620 & -418.619 \\ 278887.840 & -13311.417 & -9678.202 & 1134.900 \end{bmatrix}$$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0.001 & 73.497 & 25.659 & -0.424 \\ -0.014 & 78.411 & 15.768 & 1.606 \\ -0.047 & -202.811 & -60.728 & -3.571 \\ -0.226 & 307.030 & 2918.746 & 11.135 \\ 0.685 & 253.482 & 3679.953 & -15.178 \\ -2.425 & 548.011 & -8134.141 & 257.090 \\ 3.450 & -12530.034 & -50087.100 & -107.456 \\ 0.423 & -16600.043 & -68994.170 & -14.821 \\ 98.419 & 33942.751 & 177848.748 & -3829.527 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -4 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -6 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -8 & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -10 & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -12 & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -14 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -16 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -18 \end{bmatrix}$$

$$G = 10^3 \begin{bmatrix} -12.7525 & -228.5047 & -0.9346 \\ 4.9581 & -288.2660 & 1.7161 \\ -140.7153 & 619.2118 & -22.0917 \\ -2845.9025 & 6172.0966 & 17.8174 \\ -2850.4733 & 8814.4304 & -18.9432 \\ 9024.0583 & -22870.5073 & 569.4441 \\ -47097.4452 & -62414.3995 & -158.1532 \\ -58353.5923 & -96325.2710 & -23.5151 \\ 105428.7038 & 277332.5223 & -6553.8930 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -5857.4639 & -2044.6208 & 33.9974 \\ -6251.0656 & -1255.4738 & -128.6798 \\ 16162.5824 & 4835.1980 & 287.2046 \end{bmatrix}$$

verificando (**Matlab**)

$$\|XA - FXE - GC\|_F = 5.6520 \times 10^{-9}$$
$$\|K - X_1E - G_1C\|_F = 2.2890 \times 10^{-16}.$$

A figura 1 mostra a norma das respostas impulso do sistema nos casos: (i) sem controle (laço aberto) e (ii) com controle via realimentação de estado usando o observador funcional. Vemos que a estratégia de controle através de um observador funcional foi bem sucedida.

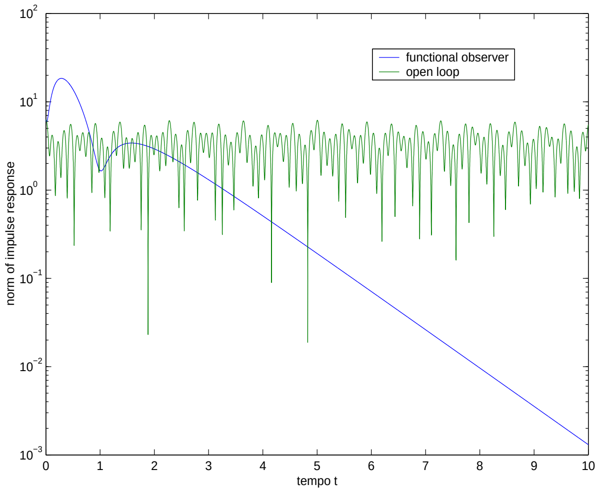


Figura 1: Magnitudes das respostas impulso, em escala logarítmica, para o sistema do Exemplo 1.

**Exemplo 2:** Considere o problema de controle, por realimentacao de estado, de um satélite de comunicações [3] cujas equações governantes podem ser reduzidas a (1), onde

$$E = \left[\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array}\right]$$

$$E_1 = 10^5 \left[\begin{array}{ccc} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0.0038 & 0. & 0. \\ 0. & 674247.8000 & \\ 0. & 0. & 50.3170 \end{array}\right]$$

$$E_2 = 10^5 \left[\begin{array}{ccc} 0.0038 & 0. & 0. \\ 0. & 674247.8000 & 0. \\ 0. & 0. & 50.3170 \\ 0. & -26.3460 & 0. \\ 0. & 26.3460 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{array}\right]$$

$$A = 10^5 diag\left(\begin{array}{ccc} .0038 & 674247.8 & 50.317 \\ .0008 & .0 & -3.4486 \end{array}\right)$$

$$C = 10^6 \left[\begin{array}{cccccc} 0.25 & 0.1 & 0.2500 & 0.4000 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0. & 0.3 & 0. \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccc} 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 13400. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{array}\right]^T.$$

A proposta é estabilizar a resposta impulso desse sistema usando uma lei de controle (3) onde

$$K = 10^2 \left[\begin{array}{ccc} -12.1183 & 1.9895 & 0. \\ -30058.1247 & -139516.5952 & 0. \\ 0. & 0. & -50317. \\ -10.0530 & -0.1420 & 0. \\ -11816.9183 & -90660.2346 & 0. \\ 0. & 0. & -7732.8666 \end{array}\right]^T.$$

Assim, usamos $v(t) = \delta(t)$, o impulso unitário de Dirac.

No contexto da construção de um observador de dimensão integral, o algoritmo proposto busca

$$X = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array}\right], \; F = \left[\begin{array}{cc} F_{11} & I \\ & F_{22} \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} G_2 \\ G_3 \end{array}\right]$$

calculando

$$X_1 = 10^3 \left[\begin{array}{ccc} -0.0127 & -0.0007 & 13.5057 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0007 \\ 0. & 0. & 0.0007 \\ -6.2787 & 3.3973 & 17.8295 \\ 0. & 0. & 0. \\ -0.0005 & 0.0003 & 0.0023 \end{array}\right]^T$$

$$X_2 = 10^3 \left[\begin{array}{ccc} 0.4329 & -0.2314 & -4.0510 \\ 0. & -0.0001 & -0.0002 \\ 0. & 0. & -0.0002 \\ 0.8295 & -1.4649 & -5.3428 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0007 \end{array}\right]^T$$

$$F = \left[\begin{array}{cccccc} -.05 & -.25 & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0.25 & -.05 & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & -.15 & 0. & 0. & 1. \\ 0. & 0. & 0. & -.20 & -.125 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & .125 & -.200 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -.30 \end{array}\right]$$

$$G = 10^6 \left[\begin{array}{cc} -0.0027 & -1.1453 \\ 0.0006 & 12.0283 \\ 4.5577 & 69.4241 \\ 0.0005 & 1.5599 \\ 0.0001 & -2.3588 \\ -0.7956 & -19.2413 \end{array}\right],$$

$$G_1 = 10^6 \left[\begin{array}{cc} 0.0146 & 23.5521 \\ -0.0009 & -12.7568 \\ -12.6793 & -35.2516 \end{array}\right]$$

onde podemos mostrar (**Matlab**)

$$\|XA - FXE - GC\|_F = 4.9303 \cdot 10^{-6}$$
$$\|K - (X_1E + G_1C)\|_F = 2.7663 \cdot 10^{-6}$$

A figura 2 mostra a norma das respostas impulso do sistema nos casos: (i) sem controle (laço aberto) e (ii) com controle via realimentação de estado usando o observador funcional. Vemos que a estratégia de controle através de observador funcional foi bem sucedida.

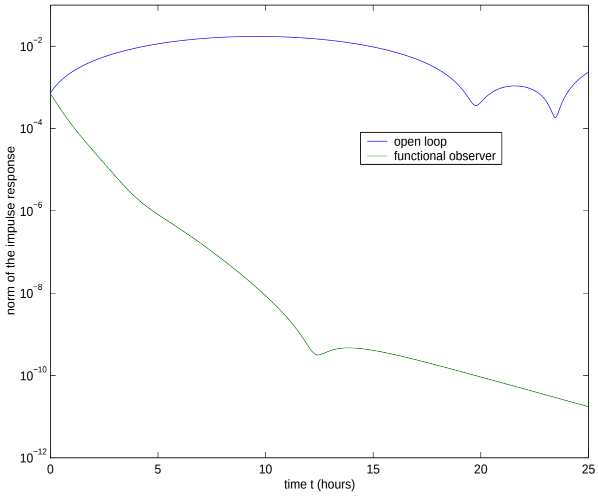


Figura 2: Magnitudes das respostas impulso, em escala logarítmica, do sistema do Exemplo 2.

## Conclusão

A teoria dos observadores funcionais propõe a estimação direta do vetor de realimentação , ao invés da estimação do vetor de estado, para o caso de sistemas clássicos de primeira ordem. Em circunstâncias onde a construção de observadores de Luenberger é computacionalmente inviável devido ao mal-condicionamento do sistema linear que calcula a aproximação da variável de estado, o uso de observadores funcionais aparece como uma alternativa. Neste trabalho, uma generalização da teoria dos observadores funcionais foi desenvolvida para o caso de sistemas generalizados de primeira ordem. Esses sistemas podem ser realizações de sistemas vibratórios de segunda ordem, e portanto os resultados obtidos podem ser usados para o controle, via realimentação de estado, desses últimos.

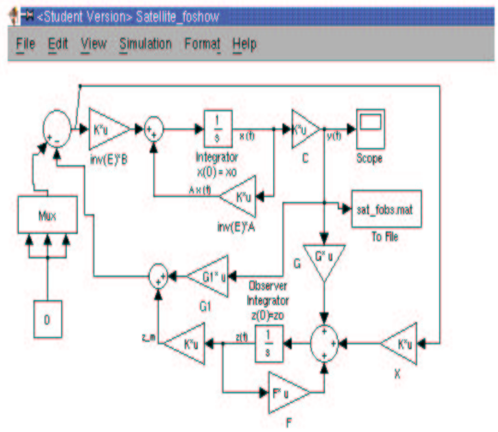


Figura 3: Diagrama em blocos usado em **Simulink** para o sistema do Exemplo 2.

Uma comparativa análise de condicionamento faz-se necessária, bem como uma análise de estabilidade numérica para o algoritmo proposto.

## Referências

[1] J. Carvalho,*State Estimation and Finite Element Model Updating for Vibrating Systems.* Tese de Dout., Northern Illinois Univ., 2002.

[2] J. Carvalho and B. Datta, *An Algorithm for Reduced-Order State Estimation of Descriptor Systems.* Proc. IEEE CDC, Las Vegas, Dec 10-13, 2002.

[3] C-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed, Oxford Univ. Press, NY, 1999.

[4] B. Datta and D.Sarkissian, *Block Algorithms for State Estimation and Functional Observers* . Proc. 2000 IEEE Int. Symp. CACSD, Alaska, pp 19-23, 2000.

[5] J. Claeyssen, *On Predicting the Response of Non-conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions.* Journal of Sound and Vibration, **140**, pp 73-84, 1990.

[6] D. Luenberger, *Observing the State of a Linear System.* IEEE Trans. Mil. Electr., **8**, pp 74-80, 1964.