Ajuste de Modelo em Sistemas Vibratórios Conservativos

João Batista Carvalho
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
carvalho@mat.ufrgs.br

Resumo

O *problema de ajuste de modelos de elementos finitos* é o problema de ajustar um modelo de segunda ordem (M, D, K), gerado pelo método de elementos finitos e descrito por

$$\begin{aligned} &M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Bu(t) \\ &y(t) = C_1 q(t) + C_2 \dot{q}(t), \end{aligned}$$

usando dados obtidos a partir de um teste de vibração , de tal forma que erros na modelagem possam ser corrigidos em um modelo ajustado $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$. Aqui M, D, and K são chamadas, respectivamente, matrizes de *massa*, *amortecimento*, e *rigidez*; $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $\ddot{q}(t)$ são chamados, respectivamente, vetores de deslocamento, velocidade e aceleração .

A necessidade de resolver esse problema surge do fato que muito frequentemente algumas frequências naturais e correspodentes modas de vibração [15] (autovalores e autovetores) de um modelo de elementos finitos (M, D, K) não correspondem com as informações obtidas de uma estrutura real de vibração . Então , o engenheiro de vibrações precisa ajustar o modelo teórico para garantir sua validez em usos futuros [16].

Lamentavelmente, os métodos presentes na literatura para a solução deste problema não sao capazes de garantir a invariância do espectro não -medido. Dessa forma, eles podem acarretar inconsistências em outras partes da estrutura, como por exemplo a criação de novas zonas de ressonância [15].

O presente trabalho mostra como relações de ortogonalidade entre autovetores de operadores matriciais conservativos $P(\lambda) = \lambda^2 M + K$ podem ser derivadas e posteriormente aplicadas ao problema de ajuste ou atualização de modelos matemáticos conservativos (M, D, K), no contexto da análise estrutural de sistemas de vibrações não -amortecidos.

Nossa abordagem permite a construção de um algoritmo de solução , também apresentado, que tem dois grandes atrativos: (i) garantidamente deixará invariante o espectro não -medido; (ii) por ser rico em operações do tipo BLAS-3, esse algoritmo pode ser implementado usando pacotes de alta-performance como LAPACK.

Esta pesquisa, que foi parcialmente suportada pela CAPES, poderá impactar uma grande variedade de indústrias, incluindo empresas aeroespaciais e automotivas, em um futuro próximo.

1 Introdução

O *problema de ajuste de modelos de elementos finitos* é o problema de ajustar um modelo de segunda ordem (M, D, K), gerado pelo método de elementos finitos e descrito por

$$\begin{aligned} &M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Bu(t) \\ &y(t) = C_1 q(t) + C_2 \dot{q}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

usando dados obtidos a partir de um teste de vibração , de tal forma que erros na modelagem possam ser corrigidos em um modelo ajustado $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$.

Aqui M, D, and K são chamadas, respectivamente, matrizes de *massa*, *amortecimento*, e *rigidez*; $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $\ddot{q}(t)$ são chamados, respectivamente, vetores de deslocamento, velocidade e aceleração .

A necessidade de resolver esse problema surge do fato que muito frequentemente algumas frequências naturais e modas de vibração correspondentes (autovalores e autovetores) de um modelo de elementos finitos (M, D, K) não correspondem com as informações obtidas de uma estrutura real de vibração . Então , o engenheiro de vibrações precisa ajustar o modelo teórico para garantir sua validez em usos futuros.

O problema pode ser matematicamente definido como segue:

Dado um modelo simétrico positivo semi-definido (M, D, K) com um conjunto $\{\lambda_k, x_k\}$, $k = 1, \ldots, m$ de autovalores e autovetores correspondentes, e um conjunto $\{\sigma_k, y_k\}$, $k = 1, \ldots, m$ de frequências naturais e correspondents modas, construir um modelo simétrico ajustado $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$ tal que

- o subconjunto $\{\lambda_k, x_k\}, k = 1, \ldots, m$ é substituído por $\{\sigma_k, y_k\}, k = 1, \ldots, m$ como autovalores e autovetores do novo modelo $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$
- o subconjunto restante de $2n - m$ autovalores e autovetores do novo modelo $(\tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{K})$ é o mesmo que aqueles de (M, D, K).

Devido à sua imensa importância prática, esse problema têm sido bastante estudado nos últimos anos. Consequentemente, já foram propostos vários métodos para sua solução [2, 4, 16, 18]. Entretanto tal problema, na forma definida acima, ainda não foi completamente resolvido.

Os métods existentes podem ser classificados nas categorias seguintes:

(i) métodos diretos usando dados modais;

(ii) métodos iterativos de otimização paramétrica;

(iii) métodos baseados na descrição via domínio frequência.

Uma descrição respeitosa desses métodos pode ser encontrada em [14].

Lamentavelmente, os métodos presentes na literatura não sao capazes de garantir o segundo ítem acima, isto é, a invariância do espectro não -medido. Dessa forma, eles podem acarretar inconsistências em outras partes da estrutura, como por exemplo a criação de novas zonas de ressonância. Será dito aqui que eles permitem "spill-over".

Outra dificuldade com esses métodos é o problema de tratar dados medidos incompletos. Geralmente, o número de graus de liberdade capazes de serem medidos é muito menor que a dimensão do modelo discretizado. Dessa forma, para comparar dados medidos com dados gerados a partir do modelo teórico, é necessário [12] ou reduzir o modelo de elementos finitos (redução de modelo) ou extrapolar os dados medidos (expansão das modas).

2 Relações de Ortogonalidade para Sistemas de Segunda Ordem Não -Amortecidos

Sabidamente, a dinâmica de um modelo de segunda ordem é governada pelo operador quadrático

$$P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K$$

e um par autovalor-autovetor satisfaz $P(\lambda)x = 0$, ou seja,

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0.$$

Frequentemente, em aplicações , a matrix D, que representa forças de *amortecimento* que agem no sistema, é desprezada, resultando

$$P(\lambda) = \lambda^2 M + K. \tag{2}$$

É bem sabido [6] que os autovetores de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podem ser escolhidos como ortonormais. Similarmente, os autovetores de um feixe simétrico positivo-definido $Q(\lambda) = \lambda K - M$ (isto é, quando $M = M^T > 0$ e $K = K^T$) podem ser normalizados tal que

$$x_i^T M x_j = \delta_{ij}\ ,\ x_i^T K x_j = \delta_{ij}\lambda_i \tag{3}$$

para $i, j = 1, 2, \ldots, n$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker.

Essas relações de ortogonalidade foram generalizadas por Datta, Elhay e Ram [7] para o feixe quadrático positivo-definido $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K$; tal generalização fundamentou uma nova abordagem para o problema de reajuste total e parcial de estruturas modais [8, 9, 10, 11].

Nesse trabalho, mostraremos como resultados sobre ortogonalidade entre os autovetores de um operador de segunda ordem podem ser estabelecidos e posteriormente aplicados para resolver o problema de ajuste de modelo de elementos finitos na situação particular onde forças de amortecimento são desprezíveis, isto é, no caso $D = 0$.

Teorema 2.1 *: Relações de Ortogonalidade para um operador quadrático simétrico positivo semi-definido*

Seja $P(\lambda) = \lambda^2 M + K$ um operador simétrico positivo semi-definido com distintos autovalores não -nulos e seja (Λ, X) uma representação da decomposição finita desse operador, verificando

$$MX\Lambda^2 + KX = 0 \tag{4}$$

sob a convenção que cada par de autovalores $\lambda = \pm i\ \alpha$ correspondento a um autovetor x é representado apenas uma vez. Dessa forma, temos $X \in \mathbb{R}^{n\times\bar{n}}$ e $\Lambda \in \mathbb{C}^{\bar{n}\times\bar{n}}$, onde $\bar{n}$ é o número de pares de autovalores finitos, assumido ser igual a n por simplicidade, e $\Lambda^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz diagonal com elementos não -positivos. Essa representação compacta faz as matrizes X e Λ terem no máximo n linhas e n colunas, ao invés de suas dimensões usuais para o problema de autovalores para o operador quadrático $Q(\lambda) = \lambda^2 M + K$.

Então as matrizes D_1 e D_2 definidas por

$$D_1 = X^T M X \tag{5}$$

e

$$D_2 = X^T K X \tag{6}$$

são diagonais e

$$D_2 = -D_1\Lambda^2. \tag{7}$$

Demonstração : Por hipótese, Λ é uma matriz diagonal cujos elementos não -nulos são distintos. Como a convenção da representação compacta é adotada, Λ^2 é também uma matriz diagonal cujos elementos não -nulos são distintos.

Transpondo (4) e usando a simetria de M e K, obtemos

$$(\Lambda^2)^T X^T M + X^T K = 0. \tag{8}$$

Premultiplicando (4) por X^T, pós-multiplicando (8) por X, e combinando resulta

$$(X^T M X)\Lambda^2 - (\Lambda^2)^T (X^T M X) = 0. \tag{9}$$

Pela equação acima, as matrizes D_1 e Λ^2 comutam, e portanto D_1 é também uma matriz diagonal.

Novamente, premultiplicando (4) por X^T e rearranjando resulta

$$X^T M X \Lambda^2 + X^T K X = 0$$

e então (7) segue. Como D_1 e Λ^2 são matrizes diagonais, de (7) temos que D_2 é também uma matriz diagonal.
□

Corolário 2.1 *Supõe que a hipótese do Teorema 2.1 valem, e sejam as matrizes X and Λ particionadas na forma*

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \; \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

e assume que Λ_1 e Λ_2 não tem elementos não -nulos comuns.

Então

$$X_1^T M X_2 = 0 \tag{11}$$

e

$$X_1^T K X_2 = 0. \tag{12}$$

□

Examplo da validade do corolário acima: Considere o operador simétrico positivo-semidefinido $P(\lambda) = \lambda^2 M + K$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1.294 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.294 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.294 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.294 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1188.5 & 196.6 & 0 & 0 & -642.4 \\ 196.6 & 626.3 & 0 & -555.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1188.5 & -196.6 & -546.1 \\ 0 & -555.6 & -196.6 & 626.3 & 196.6 \\ -642.4 & 0 & -546.1 & 196.6 & 4019.1 \end{bmatrix}.$$

Uma representação compacta finita da estrutura modal é dada por

$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} -23.6929 & & & \\ & -702.3357 & & \\ & & -943.6921 & \\ & & & -991.1000 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.2045 & -1. & 1. & -0.5069 \\ -1. & 0.5775 & 0.2627 & -0.9986 \\ -0.1403 & -0.9602 & -0.9325 & -0.7470 \\ -0.9997 & -0.6475 & 0.0726 & 1. \\ 0.0625 & -0.2586 & 0.0296 & -0.2314 \end{bmatrix}.$$

Observe também que esse operador tem dois autovalores infinitos, que naturalmente são excluídos da representação acima.

As matrizes D_1 e D_2 são

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2.6668 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4610 & -0.0000 & 0 \\ 0 & -0.0000 & 2.5153 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 3.6390 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 63.1847 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 2430.8139 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 2373.6668 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 3606.6303 \end{bmatrix}$$

que são claramente diagonais e satisfazem (**Matlab**) $\|D_2 + D_1\Lambda^2\|_F = 1.6402 \times 10^{-12}$.

3 Ajuste de Modelos de Elementos Finitos via Método Direto usando Dados Modais

Assumimos que somente m frequências naturais e as modas correspondentes devem ser ajustadas e seja (Λ, X) uma representação finita compacta da estrutura modal do modelo; sejam Λ e X particionadas como segue:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

onde $\Lambda_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, X_1 \in \mathbb{C}^{n\times m}, \Lambda_2 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}, X_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-m)}$, e tais que

- (Λ_1, X_1) corresponde ao conjunto de frequências e modas que precisam ser ajustados
- (Λ_2, X_2) corresponde ao conjunto de frequências e modas que devem permanecer inalterados.

Seja $\Sigma_1^2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a matriz que contém a informação sobre as medições das frequências naturais, e seja

$$Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} \tag{14}$$

a matriz das modas correspondentes, onde $Y_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $Y_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$. Somente é assumido que Y_{11} é conhecido; o método convenientemente constrói a matriz Y_{12}.

Teorema 3.1 *Considere o modelo positivo semi-definido (M, D, K) sem amortecimento, isto é, $D = 0$. Sejam matrizes $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, que representam a estrutura modal desse modelo, que satisfazem (4) e são particionadas como em (13). Supõe que as submatrizes diagonais Λ_1 e Λ_2 não têm nenhum elemento não -nulo comum.*

Então , para toda matriz simétrica $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o modelo simétrico ajustado $\tilde{K}$ definido por

$$\tilde{K} = K - MX_1\Phi X_1^T M \tag{15}$$

satisfaz

$$MX_2\Lambda_2^2 + \tilde{K}X_2 = 0. \tag{16}$$

Demonstração : Usando (15), temos

$$MX_2\Lambda_2^2 + \tilde{K}X_2 = MX_2\Lambda_2^2 + (K - MX_1\Phi X_1^T M)X_2 = MX_2\Lambda_2^2 + KX_2 - MX_1\Phi X_1^T MX_2 = 0$$

uma vez que $X_1^T MX_2 = 0$, pelo Corolário 2.1.

□

Em outras palavras, o teorema 3.1 garante que o ajuste simétrico de K por (15) não produzirá "spill-over".

Agora mostraremos como a matriz simétrica Φ pode ser escolhida de tal forma que a informação sobre os autovalores e autovetores medidos esteja contida no modelo ajustado; isto é, com tal escolha para Φ, a matriz $\tilde{K}$ é tal que

$$MY_1\Sigma_1^2 + \tilde{K}Y_1 = 0. \tag{17}$$

Substituindo a expressão de Y_1 em (14) e $\tilde{K}$ em (15) em (17), temos

$$M\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix}\Sigma_1^2 + K\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} = MX_1\Phi X_1^T M\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Assumimos que MX_1 seja não -singular. Então sua fatorização QR define matrizes ortogonais $U_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $U_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ e uma matriz triangular superior $Z \in \mathbb{R}^{m\times m}$ satisfazendo

$$MX_1 = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Seja $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, onde $M_1, K_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ and $M_2, K_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$.

Pode mostrar-se que a solução $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ de (18) existe somente se

$$U_2^T\left(M_1Y_{11} + M_2Y_{12}\right)\Sigma_1^2 = -U_2^T\left(K_1Y_{11} + K_2Y_{12}\right),$$

o que é equivalente a

$$U_2^T M_2 Y_{12}\Sigma_1^2 + U_2^T K_2 Y_{12} = -U_2^T(K_1Y_{11} + M_1Y_{11}\Sigma_1^2). \tag{20}$$

Temos então uma equação Generalizada de Sylvester [1, 3, 5]:

$$AY_{12}B + CY_{12} = D$$

onde B é uma matriz que possui a Forma Real de Schur, o que é um atrativo computacional muito grande para a solução numérica de alta-performance.

Uma vez que a equação (20) é resolvida para Y_{12}, podemos formar a matriz Y_1 usando (14) e então computar $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a partir de

$$Y_1^T MY_1\Sigma_1^2 + Y_1^T KY_1 = (Y_1^T MX_1)\Phi(Y_1^T MX_1)^T \tag{21}$$

Em princípio, a equação (21) dá apenas uma solução no sentido dos *Mínimos-quadrados* para (20). Entretanto, pode-se mostrar que, uma vez que (20) é satisfeita, (21) realmente dá uma solução exata de (17).

Entretanto, a simetria da solução Φ ainda não está garantida. Como o modelo ajustado deve também ser simétrico positivo semi-definido, as seguintes relações de ortogonalidade devem valer, pelo Teorema 5.1:

$$Y_1^T MY_1 = D_1 \tag{22}$$
$$Y_1^T \tilde{K}Y_1 = D_2 \tag{23}$$
$$D_2 = -\Sigma_1^2 D_1, \tag{24}$$

onde D_1 e D_2 são duas matrizes diagonais de ordem m.

Isto significa que a matriz Y_1 deverá ser reajustada antes do cálculo de matrix Φ. Agora mostraremos que a matriz Φ satisfazendo (21) é simétrica. Primeira observamos qu3 Σ_1^2 é uma matriz diagonal. Então , usando(23) e observando que D_1 é também uma matriz diagonal, vemos que o lado esquerdo de (21) é simétrico. Assim, o lado direito

$$(Y_1^T MX_1)\Phi(Y_1^T MX_1)^T$$

de (21) também simétrico, implicando que Φ é simétrica.

Algoritmo 3.1 *: Atualização de um Modelo Não -amortecido Positivo Semi-definido Usando Dados Medidos Incompletos*

Entrada: As matrizes simétricas $M, K \in \mathbb{R}^{n\times n}$; o conjunto de m autovalores e autovetores a serem atualizados; o conjunto de m frequências e modas de vibração medidas.
Saída: Matriz de rigidez atualizada $\tilde{K}$.
Hipótese: $M = M^T \geq 0$ e $K = K^T \geq 0$.
Passo 1: Forme as matrizes $\Sigma_1^2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $Y_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a partir dos dados medidos. Forme as matrizes $\Lambda_1^2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ correspondentes.
Passo 2: Calcule as matrizes $U_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$, e $Z \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a partir da fatorização QR:

$$MX_1 = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Particione $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ onde $M_1, K_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Passo 4: Resolva a equação matricial seguinte para obter $Y_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$:

$$U_2^T M_2 Y_{12} \Sigma_1^2 + U_2^T K_2 Y_{12} = -U_2^T [K_1 Y_{11} + M_1 Y_{11} \Sigma_1^2]$$

e forme a matriz

$$Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix}.$$

Passo 5: Calcule a matriz $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e a matriz diagonal $J \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que $LJL^T = Y_1^T M Y_1$ é uma fatorização simétrica (LDL^T) de $Y_1^T M Y_1$. Atualize a matriz Y_1 via $Y_1 \leftarrow Y_1 (L^{-1})^T$.
Passo 6: Calcule $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ resolvendo o seguinte sistema de equações algébricas:

$$(Y_1^T M X_1)\Phi(Y_1^T M X_1)^T = Y_1^T M Y_1 (\Sigma_1)^2 + Y_1^T K Y_1 \ .$$

Passo 7: Calcule

$$\tilde{K} = K - M X_1 \Phi X_1^T M.$$

Observação : O algoritmo acima pode ser também empregado quando um conjunto de medições completas estiver à disposição . Neste caso, passos 2,3 e 4 devem ser desconsiderados. Entretanto, a matriz simétrica calculada no Passo 6 será tal que equação (17) é satisfeita no sentido dos mínimos quadrados. Recomendamos esse procedimento quando as medições de Σ_1 e Y_1 não forem satisfatoriamente precisas.

4 Exemplo Numérico

Considere o operador simétrico quadrático $P(\lambda) = \lambda^2 M + K$ onde

- a matriz de massa simétrica P.D. $M \in \mathbb{R}^{66\times 66}$ é a matriz *bcsstm02* do diretório *MatrixMarket.*

- a matrix de rigidez (simétrica e densa) $K \in \mathbb{R}^{66\times 66}$ é a matriz *bcsstk02* do diretório *MatrixMarket.* [17]

As 5 frequências naturais mais baixas foram calculadas usando **Matlab**:

$$\{ \ \pm\sqrt{43.2650}i \quad , \pm\sqrt{43.8497}i \quad , \pm\sqrt{49.4537}i \quad , \pm\sqrt{565.6758}i \quad , \pm\sqrt{570.6518}i \ \}$$

e portanto

$$(\Lambda_1)^2 = \begin{bmatrix} -43.2650 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43.8497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -49.4537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -565.6758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -570.6518 \end{bmatrix}$$

bem como as correspondentes 5 modas (matriz X_1) foram integralmente calculadas (função integrada **eig** de **Matlab**).

Escolhemos

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\Sigma_1)^2 = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -240 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo apresentado dá a seguinte matrix Φ:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -114.436272 & 8.842767 & -40.686540 & -29.990338 & -7.358168 \\ 8.842767 & -122.943140 & 10.005896 & 7.772494 & 64.330458 \\ -40.686540 & 10.005896 & -126.878651 & -13.794853 & -6.919918 \\ -29.990338 & 7.772494 & -13.794853 & 394.208825 & -5.427779 \\ -7.358168 & 64.330458 & -6.919918 & -5.427779 & 442.945273 \end{bmatrix}.$$

A matrix ajustada $\tilde{K}$ correspondente satisfaz

$$\|MY_1(\Sigma_1)^2 + \tilde{K}Y_1\|_F = 1.4062 \times 10^{-9}$$
$$\|MX_2(\Lambda_2)^2 + \tilde{K}X_2\|_F = 1.8533 \times 10^{-10}$$

e portanto

- a estrutura modal (Σ_1, Y_1) foi satisfatoriamente alocada no novo modelo.
- As frequências e modas não medidas permaneceram inalteradas, isto é, não ocorreu "spill over".

5 Conclusão

Resultados sobre ortogonalidade entre autovetores de um operador quadrático simétrico positivo-semidefinido foram desenvolvidos para o caso não -amortecido. Usando esse resultados, um novo método para ajuste de modelos de elementos finitos em sistemas vibratórios conservativos foi proposto.

O método proposto tem duas vantagens quando comparado com outros métodos que existem na literatura: (i) não requer redução de modelo ou expansão de vetores modais; (ii) garantidamente deixará invariante o espectro não -medido no teste de vibrações . Alem disso, por ser rico em operações do tipo BLAS-3 [13], esse algoritmo pode ser implementado usando pacotes de alta-performance como LAPACK [1].

Pesquisa mais aprofundada ainda se faz necessária, tanto para a solução do problema de ajuste de modelos de segunda ordem amortecidos, quanto para o tratamento de ruídos vindos do processo de experimentação .

6 Referências

[1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. DuCroz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. Mckenney and D. Sorensen. *LAPACK User's Guide, Second Edition.* SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[2] M. Baruch, *Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Data.* AIAA Journal, **16**, 11, pp 1208-1210, 1978.

[3] P. Benner, V. Mehrmann, V. Sima, S. VanHuffel and A. Varga. *SLICOT - A Subroutine Library in Systems and Control Theory.* NICONET Report 97-3, 1997. Also in Applied and Computational Control, Signal and Circuits, Birkauser, **1**, pp. 499-539, 1999.

[4] A. Berman and E. Nagy, *Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data.* AIAA Journal, **21**, 8, pp. 1168-1173, 1983.

[5] K. Chu, *The Solution of Matrix Equations* $AXB - CXD = E$ *and* $(YA - DZ, YC - BZ) = (E, F)$. Lin. Alg. Appl., **93**, pp 93-105 , 1987.

[6] B. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications.* Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA, 1995.

[7] B. Datta, S. Elhay and Y. Ram, *Orthogonality and Partial Pole Assignment for the Symmetric Definite Quadratic Pencil.* Lin. Alg. Appl., **257**, pp 29-48, 1997.

[8] B. Datta, Y. Ram and D. Sarkissian, *Multi-input Partial Pole-placement for Distributed Parameter Gyroscopic Systems* . Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, pp 4661-4665, 2000.

[9] B. Datta, S. Elhay, Y. Ram and D. Sarkissian, *Partial Eigenstructure Assignment for the Quadratic Pencil.* Journal of Sound and Vibration , **230**, pp 101-110, 2000.

[10] B. Datta and D. Sarkissian, *Theory and Computations of Some Inverse Eigenvalue Problems for the Quadratic Pencil* . Contemporary Math. Vol *Structured Matrices in Operator Theory, Control, and Signal and Image Processing*, pp. 221-240, 2001 .

[11] B. Datta, Y. Ram and D. Sarkissian, *Spectral Modification for Gyroscopic Systems.* ZAMM (Z. Angew. Math. Mechanics), **82**, pp. 191-200, 2001.

[12] B. Datta, *Finite Element Model Updating, Eigenstructure Assignment and Eigenvalue Embedding Techniques for Vibrating Systems.* Mechanical Systems and Signal Processing in the special issue on Vibration Control, **16**, 1, 83-96, 2002.

[13] J. Dongarra, I. Duff, D. Sorensen and H. Van der Vorst. *Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers.* SIAM Press, Philadelphia, PA, 1998.

[14] M. Friswell and J. Mottershed, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics.* Kluwer Acad. Pub., London, 1995.

[15] D. Inman, *Vibration with Control, Measurement and Stability.* Prentice-Hall, London, 1989.

[16] D. Inman and C. Minas, *Matching Finite Element Models to Modal Data*. Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, **112**, 1, pp 84-92, 1990.

[17] The *Matrix Market* Directory on the Web. Online reference at *http://math.nist.gov/MatrixMarket.*

[18] D. Zimmerman and M. Widengren,*Correcting Finite Element Models Using a Symmetric Eigenstructure Assignment Technique*. AIAA, **28**, pp 1670-1676, 1990.