Seqüências

Definição. Dados uma seqüência (a_n) e um número real L, dizemos que L é o *limite* de (a_n), ou ainda que (a_n) *converge* a L se

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, n_0 \ \text{ t.q. } \ \forall n \geq n_0\,, \ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Quando isto acontece escrevemos $a_n \longrightarrow L$, ou ainda $L = \lim a_n$, ou então $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exemplo. Consideremos a seqüência $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$. Seja $L = 2$. Queremos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um n_0. Por exemplo, para $\varepsilon = 1/100$, queremos ter

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \frac{1}{100}\,. \tag{1}$$

Mas (1) é equivalente a

$$\frac{5}{n+2} < \frac{1}{100}\,. \tag{2}$$

Para que (2) ocorra é suficiente que $500 < n+2$. Segue que

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \frac{1}{100}\,, \ \forall n \geq 497.$$

Para $\varepsilon = 1/1000$, queremos ter

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \frac{1}{1000}\,.$$

Isto pode ser reescrito como

$$\frac{5}{n+2} < \frac{1}{1000}\,.$$

Basta que $5000 < n+2$. Logo

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \frac{1}{1000}\,, \quad \forall n \geq 4997.$$

Portanto, para $\varepsilon = 1/100$, $n_0 = 497$. Para $\varepsilon = 1/1000$, $n_0 = 4997$.

Em geral, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, para ter

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$$

basta que

$$\frac{5}{n+2} < \varepsilon.$$

Para ter isto, é suficiente que $\frac{5}{n} < \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos o númro real positivo $\frac{5}{\varepsilon}$. Pela propriedade arquimediana, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 > \frac{5}{\varepsilon}$. Logo

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon\,, \quad \forall n \geq n_0,$$

provando que $\lim \frac{2n-1}{n+2} = 2$.

Obs. $x_n \longrightarrow a \iff$ qualquer vizinhança $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de a contém todos os termos da seqüência, com a possível excessão de um número finito deles.

Definição. Dizemos que uma seqüência $\big(a_n\big)$ é limitada se $\exists\, M$ tal que $|a_n| \leq M$, $\forall n$.

Proposição. Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração: Suponhamos que $x_n \to a$. Para $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $|x_n - a| < 1$. Então, $|x_n| \leq |a| + 1$, $\forall n \geq n_0$. Seja $M = \max\{|a|+1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$. Logo $|x_n| \leq M$, $\forall n$, isto é, $\big(x_n\big)$ é limitada.

Observação. A recíproca é falsa. Existem seqüências limitadas que não convergem. Por exemplo, $a_n = (-1)^n$.

Definição. Dizemos que $a_n \longrightarrow +\infty$, ou ainda, $\lim a_n = +\infty$, se $\forall M > 0$, $\exists\, n_0$ tal que $a_n > M$, $\forall n \geq n_0$.

Note que se $\lim a_n = +\infty$, então a seqüência é divergente, pois não vai ser limitada. Analogamente dizemos que $\lim a_n = -\infty$ se $\forall M > 0$, $\exists\, n_0$ tal que $a_n < -M$, $\forall n \geq n_0$.

Teorema da permanência do sinal. Se $a_n \longrightarrow a$ e $a_n \geq b$, $\forall n$, então $a \geq b$.

Demonstração: Suponhamos que $a_n \longrightarrow a$ e que $a_n \geq b$, $\forall n$. Queremos mostrar que $a \geq b$. Suponhamos por absurdo que $a < b$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < b$, por exemplo, $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Seja n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Então, $a_n < a + \varepsilon < b$, $\forall n \geq n_0$. Mas isto é uma contradição, pois $a_n \geq b$, $\forall n$.

Proposição. Se $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) $x_n + y_n \longrightarrow a + b$

(ii) $\lambda x_n \longrightarrow \lambda a$

(iii) $x_n y_n \longrightarrow ab$

(iv) Se $b \neq 0$, então $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $b_n \neq 0$ e $\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Demonstração: (i) Suponhamos que $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$. Vamos mostrar que $x_n + y_n \longrightarrow a + b$. Seja $\varepsilon > 0$. Então

$$\exists\, n_1 \text{ t.q. } |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n \geq n_1 \qquad \text{e } \exists\, n_2 \text{ t.q. } |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n \geq n_2\,.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então,

$$\forall n \geq n_0\,,\ |(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $x_n + y_n \longrightarrow a + b$.

(iii) Suponhamos que $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$. Então $\big(x_n\big)$ é limitada. Logo $\exists\, M > 0$ t.q. $|x_n| \leq M$, $\forall n$. Vamos mostrar que $x_n y_n \longrightarrow ab$. Suponhamos primeir que $b \neq 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $\exists\, n_1$, t.q. $\forall n \geq n_1$, $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$. Também $\exists\, n_2$, t.q. $\forall n \geq n_2$, $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, $\forall n \geq n_0$,

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|}\,,$$

provando que $x_n y_n \longrightarrow ab$. O caso $b = 0$ segue pelo mesmo argumento e é ainda mais simples.

Exemplo. $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.
Por uma lado é claro que $\sqrt[n]{n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Escrevemos

$$\sqrt[n]{n} = 1 + b_n\,, \qquad \text{com} \;\; b_n > 0.$$

Queremos mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $\big|\sqrt[n]{n} - 1\big| = b_n < \varepsilon$. Aplicando o Binômio de Newton, tem-se

$$n = \big(1 + b_n\big)^n = 1 + n b_n + \frac{n(n-1)}{2}\big(b_n\big)^2 + \cdots + \big(b_n\big)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\big(b_n\big)^2.$$

Portanto

$$\frac{n-1}{2}\big(b_n\big)^2 < 1$$

É suficiente mostrar que

$$\frac{n}{2}\big(b_n\big)^2 < 1.$$

Ou seja, basta que $b_n < \sqrt{\dfrac{2}{n}}$. Portanto, para ter $b_n < \varepsilon$, basta que $\sqrt{\dfrac{2}{n}} < \varepsilon$.
Portanto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos o número real $\dfrac{2}{\varepsilon^2}$. Pela propriedade arquimediana, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon^2}$. Temos

$$n \geq n_0 \Longrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{n}{2}\big(b_n\big)^2 < 1$$

Seqüências Monótonas

Definição. Dizemos que a seqüência $\big(a_n\big)$ é:

(i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$.

(ii) *estritamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$.

(iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$.

(iv) *estritamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$.

Se uma das condições acima for satisfeita a seqüência é dita *monótona*.

Teorema. *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (a_n) monótona e limitada. Para fixar as idéias suponhamos que (a_n) seja crescente. Seja $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Então A é um conjunto limitado e não vazio, pois $a_1 \in A$. Logo $\exists\, s \in \mathbb{R}$, $s = \sup A$. Vamos mostrar que $a_n \longrightarrow s$. Seja $\varepsilon > 0$. Então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$. Como (a_n) é crescente, temos que $\forall n \geq n_0$, $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$. Segue que $\forall n \geq n_0$, $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$. Ou seja, $\forall n \geq n_0$, $|s - a_n| < \varepsilon$. Então $a_n \longrightarrow s$.

Exemplo – o número e. Consideremos as duas seqüências

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

A seqüência (b_n) é obviamente crescente.

Afirmação 1. (b_n) é crescente e limitada, sendo 3 uma cota superior.

De fato,

$$b_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.$$

Que (b_n) é crescente, é imediato.

Afirmação 2. (a_n) é crescente e $a_n < b_n$, $\forall n$.

Note que, usando o Binômio de Newton,

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

À medida que n cresce, cada parcela cresce e cresce também o número de parcelas. Como as parcelas são todas positivas, cresce a_n. Logo a seqüência é crescente. Da expressão acima também segue imediatamente que $a_n < b_n$, $\forall n$.

Afirmação 3. A seqüência (a_n) tende para um limite, que indicaremos por e, entre 2 e 3.

Vimos que (a_n) é crescente. Também é limitada, pois $2 < a_n < b_n < 3$. Portanto $\exists\, e = \lim a_n$

Afirmação 4. $\lim b_n = e$

(b_n) é crescente e limitada, portanto convergente. Além disto $b_n > a_n$, $\forall n$. Segue que

$$\lim b_n \geq \lim a_n = e.$$

Por outro lado,

$$a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

para todo $n \geq m$. Fixando m e fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtém-se

$$e \geq b_m, \quad \forall m.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, segue que

$$\lim b_n \leq e\,.$$

Combinando as duas desigualdades, temos

$$\lim b_n = e\,.$$

Exemplo. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

Definimos uma seqüência recursivamente por

$$x_1 = \sqrt{2}\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\,.$$

Não sabemos ainda se $\big(x_n\big)$ converge, mas se convergir

$$L = \sqrt{2 + L}\,.$$

Elevando os dois lados ao quadrado,

$$L^2 = 2 + L$$

As raízes da equação $L^2 - L - 2 = 0$ são $L_1 = -1$ e $L_2 = 2$. Como uma seqüência $\big(x_n\big)$ de positivos não pode convergir para um número positivo, pelo Teorema da Permanência do Sinal. Portanto o único cnadidatoa limite da seqüência é 2. Calculando os primeiros termos,

$$x_1 = 1 \leq \sqrt{2} = x_2,$$

vˆse que se a seqüência $\big(x_n\big)$ for monótona, só poderá ser crescente.

Afirmação 1. $x_n \leq 2$, $\forall n$.
A demonstração é por indução. Vale para $n = 1$, pois $x_1 = \sqrt{2} < 2$.
Supondo que já foi provado que $x_n \leq 2$, para um determinado n. Então, $2 + x_n \leq 4$ e, finalmente,

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq 2\,.$$

Afirmação 2. $x_n < x_{n+1}$, $\forall n$, isto é.
De fato, vale para $n = 1$, $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$
Supondo já provado, para um certo n que $x_n < x_{n+1}$. Então $2 + x_n < 2 + x_{n+1}$ e, portanto, $\sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + x_{n+1}}$. Segue que $x_{n+1} < x_{n+2}$. Portanto $x_n < x_{n+1}$, $\forall n$.

Portanto a seqüência (x_n) converge. Mas então, pelo argumento dado acima, $\lim x_n = 2$.

Teorema (Critério do Sanduíche). Se $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n$ e se $\lim x_n = \lim z_n = L$, então $\lim y_n = L$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim x_n = L$, $\exists\, n_1$ t.q. $\forall n \ge n_1,\ L - \varepsilon < x_n$. Como $\lim z_n = L$, $\exists\, n_2$ t.q. $\forall n \ge n_1,\ z_n < L + \varepsilon$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, $\forall n \ge n_0$,

$$L - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < L + \varepsilon\,.$$

Portanto, $\forall n \ge n_0,\ L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$. Logo $\lim y_n = L$.

Aplicação.

Afirmação 1. Se $x_n \longrightarrow a$ e se $i(n)$ é uma seqüência de naturais com $i(n) \longrightarrow +\infty$, então $x_{i(n)} \longrightarrow a$.

Afirmação 2. Se $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, então $\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} \longrightarrow e$.

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{[\lambda_n] + 1}\right)^{[\lambda_n]}}_{x_n} \le \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} \le \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[\lambda_n]}\right)^{[\lambda_n]+1}}_{y_n}$$

Sabemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n+1}} \longrightarrow e$$

Portanto $x_n \longrightarrow e$. Da mesma forma se mostra que $y_n \longrightarrow e$. Pelo Critério do Sanduíche conclui-se que $\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} \longrightarrow e$.

Afirmação 3. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^x,\ \forall x \ge 0$.

Proposição. Se $a_n \longrightarrow L$, então $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \longrightarrow L$.

Demonstração: Como (a_n) é convergente, então é limitada. Portanto, $\exists\, M$ t.q. $|a_n| \le M$, $\forall n$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ t.q. $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \ge n_0$. Então, $\forall n > n_0$,

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - L\right| \le \frac{|a_1 - L| + \cdots + |a_n - L|}{n}$$

$$\le \frac{|a_1 - L| + \cdots + |a_{n_0} - L|}{n} + \frac{|a_{n_0+1} - L| + \cdots + |a_n - L|}{n}$$

$$< \frac{n_0 M}{n} + \frac{(n-n_0)\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{n_0 M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Seja $n_1 > n_0$ tal que $\dfrac{n_0 M}{n_1} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Então

$$\forall n \geq n_0\,, \qquad \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - L \right| < \varepsilon\,.$$

Observação. A recíproca é falsa. Por exemplo, para $a_n = (-1)^n$, a seqüência não converge, no entanto as médias aritméticas satisfazem

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{1}{n}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Portanto $\lim \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0$.

Observação. Esta proposição é aplicada para estudar a noção de somabilidade de algumas séries divergentes.

Dizemos que uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *convergente* e que o número real S é sua *soma* se a seqüência das somas parciais $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ converge para S. Caso contrário, a série é dita *divergente.*

Em alguns casos, mesmo a série sendo divergente, é possível atribuir um valor a sua soma. Uma situação deste tipo é a seguinte. Dada a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, consideramos a seqüência de suas somas parciais $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e formamos a seqüência $\big(\sigma_n\big)$ das médias aritméticas dos s_n, ou seja,

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

Se a seqüência $\big(\sigma_n\big)$ convergir para um $S \in \mathbb{R}$, dizemos que a série é somável à Cesaro e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \text{à Cesaro.}$$

A proposição anterior mostra que se uma série for convergente com soma S, então é somável à Cesaro com soma S. Isto, é claro, é o mínimo que se espera de qualquer método se somabilidade.

Exemplo. A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ é divergente, pois as somas parciais valem

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

formando uma seqüência divergente. Por outro lado, as médias aritméticas dos s_n valem

$$\sigma_{2n} = \frac{1 + 0 + 1 + 0 + \cdots + 1 + 0}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{1+0+1+0+\cdots+1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}\,.$$

Portanto $\sigma_n \longrightarrow \frac{1}{2}$. Logo

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2} \qquad \text{à Cesaro.}$$

A somabilidade à Cesaro é importante no studo de séries de Fourier. A série de Fourier de uma função contínua f nem sempre converge, mas é somável no sentido de Cesaro com soma $f(x)$.

Um outro exemplo de método que soma algumas séries divergentes é o de Abel. Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se para todo $x \in [0,1)$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ for convergente e se existir o limite

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é somável à Abel com soma S e escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \qquad \text{à Abel.}$$

Exemplo. Tomando a mesma série $1-1+1-1+1-1+\cdots$ considerada acima, consideramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

que neste caso é uma série geométrica de razão $-x$. A somas parciais são

$$s_n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \longrightarrow \frac{1}{1+x}$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}$$

converge para todo $x \in [0,1)$. Além disto,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Logo

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2} \qquad \text{à Abel.}$$

Proposição. Se $0 < a < 1$, então $a^n \longrightarrow 0$.

Demonstração. $\frac{1}{a} > 1$. Então $\frac{1}{a} = 1 + h$, com $h > 0$. Utilizando o Binômio de Newton

$$0 \le a^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}\,.$$

Como $\dfrac{1}{nh} \longrightarrow 0$, pelo critério do sanduíche, segue que $a_n \longrightarrow 0$.

Proposição. Se $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \longrightarrow 0$.

Demonstração: $a > 1$. Escrevemos $a = 1 + b$, onde $b = a - 1 > 0$. Seja $k \in \mathbb{N}$ t.q. $k \geq \alpha$. Pelo Binômio de Newton, $\forall n > k$,

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)\,b^2}{2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)\,b^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots + b^n\,.$$

Portanto,

$$a^n \geq \frac{n(n-1)\cdots(n-k)\,b^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Segue que

$$0 \leq \frac{n^\alpha}{a^n} \leq \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} \cdot \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}\,,$$

ou ainda,

$$0 \leq \frac{n^\alpha}{a^n} \leq \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} \cdot \frac{1}{n\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{k}{n}\big)}$$

Como $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{k}{n}\big)} = 0$, segue pelo critério do sanduíche que $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \longrightarrow 0$.

Proposição. Se $x_n > 0$, $\forall n$ e $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow a$, então $\sqrt[n]{x_n} \longrightarrow a$.

Demonstração: Vamos provar o caso $a > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < a$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $a - \varepsilon < \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < a + \varepsilon$. Portanto,

$$\big(a-\varepsilon\big)x_n < x_{n+1} < \big(a+\varepsilon\big)x_n$$

$$\big(a-\varepsilon\big)x_{n-1} < x_n < \big(a+\varepsilon\big)x_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\big(a-\varepsilon\big)x_{n_0} < x_{n_0+1} < \big(a+\varepsilon\big)x_{n_0}$$

aplicando repetidas vezes as desigualdades acima, obtém-se

$$\big(a-\varepsilon\big)^{n-n_0} x_{n_0} < x_n < \big(a+\varepsilon\big)^{n-n_0} x_{n_0}$$

Portanto,

$$\frac{\big(a-\varepsilon\big)\sqrt[n]{x_{n_0}}}{\big((a-\varepsilon)^{n_0}\big)^{\frac{1}{n}}} < \sqrt[n]{x_n} < \frac{\big(a+\varepsilon\big)\sqrt[n]{x_{n_0}}}{\big((a+\varepsilon)^{n_0}\big)^{\frac{1}{n}}}$$

Como $\lim \sqrt[n]{x_{n_0}} = \lim\bigl((a+\varepsilon)^{n_0}\bigr)^{\frac{1}{n}} = \lim\bigl((a-\varepsilon)^{n_0}\bigr)^{\frac{1}{n}} = 0$, segue que $\exists\, n_1$ t.q. $\forall n \geq n_1$,
$a - 2\varepsilon < \dfrac{(a-\varepsilon)\sqrt[n]{x_{n_0}}}{\bigl((a-\varepsilon)^{n_0}\bigr)^{\frac{1}{n}}} < \dfrac{(a+\varepsilon)\sqrt[n]{x_n}}{\bigl((a+\varepsilon)^{n_0}\bigr)^{\frac{1}{n}}} < a + 2\varepsilon$.

Seja $n_4 = \max\{n_0, n_1\}$. Então, $\forall n \geq n_4$, $a - 2\varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < a + 2\varepsilon$, provando que $\lim \sqrt[n]{x_n} = a$.

Aplicação. $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Demonstração: Seja $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

Pela proposição, $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Subseqüências

Definição. Uma subseqüência de uma seqüência, é uma nova seqüência, obtida pela eliminação de alguns termos da seqüência original.

Por exemplo, dada uma seqüência $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$, um exemplo de subseqüência é a seqüência $a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, \dots$.

Para formar uma subseqüência de (a_n), selecionamos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$. A subseqüência é (a_{n_k}).

Por exemplo, uma seqüência de $a_n = (-1)^n$ é a seqüência constante igual a 1.

Proposição. Se uma seqüência (a_n) converge a L, então qualquer subseqüência também converge a L.

Aplicação. A seqüência $a_n = (-1)^n$ é divergente pois tem duas subseqüências convergindo a limites diferentes. $a_{2n-1} \longrightarrow 1$ e $a_{2n} \longrightarrow -1$. Portanto é divergente. Se fosse convergente todaa as subbseqüências convergiriam para o mesmo limite.

Segue um dos mais importantes teoremas da Análise.

Teorema de Bolzano–Weierstrass. Toda seqüência limitada tem uma subseqüência convergente.

Demonstração: Vamos usar a propriedade dos intervalos encaixantes. Seja (x_n) uma seqüência limitada. Vamos mostrar que ela possui uma subseqüência convergente. Suponhamos que $\forall n$, $a_1 \leq x_n \leq b_1$. Escolhemos $n_1 = 1$ e $I_1 = [a_1, b_1]$. A seguir dividimos o intervalo I_1 através de seu ponto médio. Pelo menos uma das metades conterá x_n para uma infinidade de n's. Escolhemos para $I_2 = [a_2, b_2]$ uma das metades de I_1 que contenha x_n para uma infinidade de n's. Escolhemos para n_2 um índice $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in I_2$. A seguir dividimos I_2 pelo ponto médio e escolhemos para $I_3 = [a_3, b_3]$ uma das metades de I_2 que contenha x_n para uma infinidade de n's. Escolhemos para n_3 um índice $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in I_3$. Continuando com este procedimento, geramos uma subseqüência (x_{n_k})

tal que $x_{n_k} \in I_{n_k}$, $\forall k$. Pela propriedade dos intervalos encaixantes, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.q. $c \in I_{n_k}$, $\forall k$. Basta verificarmos que $x_{n_k} \longrightarrow c$. Dado $\varepsilon > 0$, como cada I_k é obtido pela divisão do anterior em dois intervalos de mesmo comprimento, o comprimento $b_k - a_k$ é a metade do anterior. Portanto $b_k - a_k = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$. Segue que $b_k - a_k \longrightarrow 0$. Portanto, $\exists\, k_0$ tal que $b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$. Então, $\forall k \geq k_0$, como $x_{n_k}, c \in I_k$, temos que $\left|x_{n_k} - c\right| \leq b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$. Logo $x_{n_k} \longrightarrow c$, provando o teorema.

Seqüências de Cauchy

Se uma seqüência (x_n) convergem, significa que, para n grande, os x_n vão ficando próximos de um limite L. Intuitivamente, se os x_n vão ficando próximos de um L, então vão ficando próximos entre si. Abaixo formalizamos esta noção.

Definição. Dizemos que (a_n) é uma *seqüência de Cauchy* se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n, m \geq n_0$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema. (a_n) é convergente se e somente se (a_n) é de Cauchy.

Demonstração: Precisamos mostrar duas implicações.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponhamos que (a_n) seja convergente. Suponhamos que $a_n \longrightarrow c$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $\left|a_n - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Então, $\forall n, m \geq n_0$, temos

$$\left|a_n - a_m\right| = \left|(a_n - L) - (a_m - L)\right| \leq \left|a_n - L\right| + \left|a_m - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo a seqüência é de Cauchy.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Precisamos mostrar que se uma seqüência é de Cauchy, então é convergente. Vamos dividir a demonstração em etapas.

Afirmação 1: Toda seqüência de Cauchy é limitada.
Suponhamos que (a_n) seja de Cauchy. Para $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n, m \geq n_0$, $|a_n - a_m| < 1$. Em particular, para $m = n_0$, $\forall n \geq n_0$, $|a_n| - |a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1$. Logo

$$|a_n| < |a_{n_0}| + 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Seja $M = \max\{|a_{n_0}| + 1, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Então

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n,$$

provando que toda seqüência de Cauchy é limitada.

Afirmação 2: Toda seqüência de Cauchy tem uma subseqüência que converge.
É só combinar a Afirmação 1 com o Teorema de Bolzano–Weierstrass.

Afirmação 3: Toda seqüência de Cauchy converge.
Seja (a_n) seqüência de Cauchy, Sabemos que existe uma subseqüência convergente $a_{n_k} \longrightarrow c$. Vamos mostrar que a seqüência toda converge para c. Seja $\varepsilon > 0$.

$$\exists\, r \text{ t.q. } \forall n, m \geq r, |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \exists\, s \text{ t.q. } \forall n_k \geq s, |a_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $t = \max\{r, s\}$. Então, dado um $n \geq t$, tomamos um $n_k \geq t$ e vamos ter

$$\left|a_n - c\right| = \left|(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - c)\right| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fica assim provado o teorema.

Teorema (Método das aproximações sucessivas). Seja $\left(x_n\right)$ uma seqüência. Suponhamos que $\exists\, \lambda$, com $0 < \lambda < 1$ t.q. $|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|$, $\forall n$. Então $\left(x_n\right)$ é convergente.

Demonstração: Vamos mostrar que $\left(x_n\right)$ é uma seqüência de Cauchy. Começamos notando que

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \lambda^2 |x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \cdots \leq \lambda^{n-2} |x_2 - x_1|\,, \quad \forall n.$$

Aplicando repetidas vezes esta desigualdade,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \left(\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-2} + \cdots + \lambda^{n-1}\right) |x_2 - x_1|$$

$$= \frac{\lambda^{n-1} - \lambda^{n+p-1}}{1 - \lambda} \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} \leq \lambda^{n-1}$$

Como $0 < \lambda < 1$, então $\lambda^{n-1} \longrightarrow 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$, $\lambda^{n-1} < \varepsilon$. Logo, $\forall n \geq n_0$, $\forall p$, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Portanto, $\left(x_n\right)$ é uma seqüência de Cauchy.

Exemplo. Aproximação de $\sqrt{2}$ por frações contínuas.

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}$$

Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Aplicando esta última fórmula repetidas vezes obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

Somos assim levados a examinar

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Para dar um sentido a esta expressão, vamos estudar a seqüência

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}, \quad \text{etc.}$$

Definimos uma seqüência (x_n) recursivamente:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n} \, .$$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{1 + x_{n+1}} - \frac{1}{1 + x_n} \right| = \frac{|x_n - x_{n+1}|}{\big(1 + x_n\big)\big(1 + x_{n+1}\big)} \leq \frac{|x_n - x_{n+1}|}{4} \, ,$$

pois a partir da definição recursiva é evidente que $x_n > 1$, $\forall n$. Logo $\lambda = \frac{1}{4}$. Pelo teorema, $\exists\, L = \lim x_n$. A partir da fórmula recursiva

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$$

obtém-se

$$L = 1 + \frac{1}{1 + L}$$

Segue que $\big(L + 1\big)L = L + 2$, ou seja, $L^2 = 2$. Conclui-se que $L = \sqrt{2}$ ou $L = -\sqrt{2}$. Como $x_n\ 0$, $\forall n$, o limite não pode ser negativo. Logo $L = \sqrt{2}$.

Exemplo. Dado $b > 0$, para $a > 0$ arbitrário, defina recursivamente

$$x_0 = a \, , \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n} \right)$$

Então $\lim x_n = \sqrt{b}$.

Exercícios

1. Dados $a > 0$, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. **Sugestão:** Use a mesma idéia que foi usada para mostrar que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Dados $a, b > 0$, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$. OBS: Basta mostrar que se $0 < a < b$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$. **Sugestão:** Use que $b^n \leq a^n + b^n \leq 2\, b^n$.

3. Suponha que $A \subseteq \mathbb{R}$ seja limitado e não vazio e que $S := \sup A \notin A$. Mostre que $\exists\, x_n \in A$ t.q. $x_n < x_{n+1} < S$, $\forall n$ e $x_n \longrightarrow S$. **Sugestão:** Para cada n, considere $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.

4. Defina uma seqüência que dê um sentido para $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$. Mostre que a seqüência converge e determine seu limite.

5. Seja (x_n) uma seqüência de números positivos. Suponhamos que $\exists\, c$ t.q. $0 < c < 1$ e $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq c$, $\forall n$. Mostre que $\lim x_n = 0$. Use este fato para justificar que $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

6. Mostre que a seqüência (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad , \qquad x_{n+1} = 2\, x_n - \frac{1}{2}\, x_n^2$$

converge e encontre seu limite.

7. **(i)** Se $a, b > 0$, prove que a média geométrica $\sqrt{ab}$ é menor ou igual à média aritmética $\dfrac{a+b}{2}$.

(b) Dados $a, b > 0$, defina recursivamente as seqüências (x_n) e (y_n) por

$$x_1 = \sqrt{a\, b} \qquad , \qquad y_1 = \frac{a+b}{2}$$

e

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n\, y_n} \qquad , \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad .$$

Mostre que (x_n) e (y_n) convergem para um mesmo limite (que é chamado média aritmético-geométrica de a e b).

8. Dada uma seqüência (x_n) e um número real a, prove que existe uma subseqüência $x_{n_k} \longrightarrow a \iff$ qualquer vizinhança $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ de a contém uma infinidade de termos da seqüência.

9. Dada uma seqüência (x_n) limitada, seja $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

(i) Mostre que se $x_n \longrightarrow a$, então $s_n \longrightarrow a$.

(ii) Mostre que (s_n) é monótona limitada e, portanto, convergente, mesmo que (x_n) não o seja.

(iii) Mostre que se (x_{n_k}) é uma subseqüência convergente de (x_n), com $x_{n_k} \longrightarrow b$, então $\lim s_n \geq b$.

(iv) Mostre que existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n), convergindo para $a := \lim s_n$. Em outras palavras, existe um número real a, que é o maior valor que é o limite de alguma subseqüência de (x_n). Este número é chamado de *limite superior* da seqüência e é denotado por $a = \limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

(v) Enuncie as definições e prove os resultados análogos, conduzindo à noção de limite inferior de uma seqüência.

10. Definição: Se $a \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que a é um ponto de acumulação de A se $\forall \varepsilon > 0$, $[(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)] \cap A \neq \emptyset$. Prove que:

(i) a é ponto de acumulação de A $\iff \exists\, x_n \in A$ seqüência com $x_n \neq a$, $\forall n$, tal que $x_n \longrightarrow a$.

(ii) Se A é infinito e limitado então $\exists\, a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de A.

(iii) Dê um exemplo de conjunto infinito sem ponto de acumulação.