LISTA 3 Análise

1. Sejam $f:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:[c,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ contínuas. Suponha que $f(c)=g(c)$. Defina $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $h(x)=\begin{cases} f(x)\ , & \text{se } x\le c \\ g(x)\ , & \text{se } x>c \end{cases}$. Mostre, a partir da definição, que h é contínua no ponto c.

2. Seja $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável. Sabendo que $f(0)=0$ e $f'(x)>1\ ,\forall x\in(0,\infty)$, prove que $f(x)>x\ ,\forall x\in(0,\infty)$.

3. Mostre que a equação $x^n+p\,x+q=0$ tem no máximo 2 raízes reais se n é par e no máximo 3 raízes reais se n é ímpar.

4. Sabe-se que em toda equação do terceiro grau $x^3+a\,x^2+b\,x+c=0$ o termo em x^2 pode ser eliminado através da substituição $x\longmapsto x-\frac{a}{3}$. Prove que a equação $x^3+p\,x+q=0$ tem 3 raízes reais distintas $\iff 4\,p^3+27\,q^2<0$.

5. Prove que $\operatorname{sen} x > x-\dfrac{x^3}{6}$, para todo $x>0$. **Sugestão:** Estude o comportamento em $[0,+\infty)$ da função $f(x)=\operatorname{sen} x - x + \dfrac{x^3}{6}$, através da análise de suas derivadas.

6. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável t.q. $f(\pi)=\pi$ e $f(e)=e$. Mostre que $\exists\, x\in\mathbb{R}$ t.q. $f'(x)=1$.

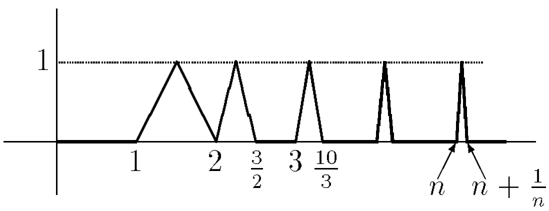
7. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ duas vezes derivável t.q. $f(\frac{1}{n})=0$. Prove que $f''(0)=0$.

8. Seja $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:

(i) f não é uniformemente contínua;

(ii) $\exists\,\varepsilon>0\ ,\ \exists\, x_n,y_n\in I$, t.q. $|x_n-y_n|\longrightarrow 0$ e $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon\ ,\ \forall n$.

(ii) Justifique que a função dada pelo gráfico abaixo não é uniformemente contínua.



(iii) Justifique que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen} x^2$ não é uniformemente contínua. **Sugestão:** Faça um esboço do gráfico da função.

9. Seja $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável. Sabendo que $f(0)=0$ e que $f'(x)>1$, $\forall x$, mostre que $f(x)>x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

10. Seja $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável. Suponha que existam os limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ e

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = B$. Prove que $B = 0$. **Sugestão:** Justifique que $\lim_{n\to+\infty}\Big(f(n+1)-f(n)\Big) = 0$. Use o Teorema do Valor Médio.

11. Dê um exemplo de $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua mas não uniformemente contínua, justificando.

12. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Prove que f tem um ponto de máximo. Pode acontecer que f não tenha ponto de mínimo? Justifique.

13. Justifique que $\forall c > 0$ a equação $x \ln x = c$ tem uma e uma só raiz $x > 0$.

14. Justifique que $\forall n \in \mathbb{N}$, a equação $\tan x = x$ tem uma única raiz $t_n \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ e que a função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é monótona decrescente no intervalo (t_{2n}, t_{2n+1}) e monótona crescente no intervalo (t_{2n-1}, t_{2n}).

15. Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. existem $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ e $\lim_{x\to b+} f(x) = B$. Defina $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\tilde{f}(a) = A$, $\tilde{f}(b) = B$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$, se $x \in (a,b)$. Prove que $\tilde{f}$ é contínua.

16. Justifique se $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto 0 e se $\forall \alpha > 0$ $f|_{[\alpha,\infty)}$ (restrição de f) é uniformemente contínua em $[\alpha,\infty)$, então f é uniformemente contínua. Exemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em 0 e $f|_{[\alpha,\infty)}$ é de Lipschitz $\forall \alpha > 0$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua t.q. existem os limites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Prove que f é uniformemente contínua.

18. Seja $A \subseteq [0,1]$ infinito enumerável, $A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$. Sejam $a_n > 0$, com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Defina $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{\substack{n \text{ t.q.} \\ x_n \le x}} a_n$$

Prove que f é monótona crescente, descontínua nos pontos de A e contínua nos pontos de $[0,1] \setminus A$. Prove que em um ponto $x_n \in A$, $\lim_{x\to x_n-} f(x) = f(x_n)$ e $\lim_{x\to x_n+} f(x) = f(x_n) + a_n$.

Observação. Este exercício permite construir uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona descontínua em todos os racionais do intervalo $[0,1]$.

19. Prove as desigualdades:

(a) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\quad \forall x > 0$.

(b) $\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}\ , \quad \forall x > 0\,.$

(c) $x < \dfrac{x}{1-\frac{x}{2}} < -\ln(1-x) < \dfrac{x}{1-x}\ , \quad \forall x \in (0,1)\,.$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x\ , \quad \forall x > 0\,.$

(e) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}\ , \quad \forall x > 0\,.$

(f) $\arctan x < x - \dfrac{x^3}{6}\ , \quad \forall x \in (0,1]\,.$

(g) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}\ , \quad \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})\,.$

(h) $\dfrac{1}{3}\tan x + \dfrac{2}{3}\operatorname{sen} x > x\ , \quad \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})\,.$