MAT 01066 – Combinatória I
1ª Lista Adicional de Exercícios

1. (***Grupo A***) O objetivo desta questão é provar de duas maneiras diferentes a identidade

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}. \tag{1}$$

(a) Considere o problema de formar comissões de n pessoas a partir de um grupo de n homens e n mulheres. Conte essas comissões de duas maneiras diferentes: 1ª) diretamente; 2ª) dividindo em casos, conforme o número de mulheres que a comissão contém. Comparando os resultados, obtenha uma demonstração de (1).

(b) Aplique o binômio de Newton a ambos os lados da igualdade $\big(1+x\big)^{2n} = \big(1+x\big)^{n}\big(1+x\big)^{n}$. Comparando a expressão do coeficiente de x^n de ambos os lados, obtenha a identidade (1).

(c) Deduza de (1) a identidade de Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. (***Grupo B***) O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente, que se pode formar a partir de uma conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. **Sugestão:** Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente entre seus membros. Outro método é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e escolher depois o restante da comissão. Use o fato já conhecido que se $\mid B \mid = m$ então o número de todos os possíveis subconjuntos de B é $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m$.

(b) Tome a expressão

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

que se obtém aplicando o binômio de Newton, derive em relação a x e subsitua $x = 1$.

3. (***Grupo C***) O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\binom{n}{k} = n\,(n-1)\,2^{n-2}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e outra para vice-presidente, que se pode formar a partir de n pessoas (portanto as comissões vão conter ao menos 2 pessoas). Conte essas comissões de 2 maneiras diferentes e compare os resultados. **Sugestão:** Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o vice-presidente entre seus membros. Outro método é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e outra para vice-presidente e escolher depois o restante da comissão. Use o fato já conhecido que se $\mid B \mid = m$ então o número de todos os possíveis subconjuntos de B é $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$. Use o mesmo tipo de idéia que na questão aterior.

(b) Tome a expressão

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

que se obtém aplicando o binômio de Newton, derive duas vezes em relação a x e depois faça a substitução $x = 1$.

4. (*Grupo D*) Prove a identidade

$$n\binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$$

(a) *Demonstração combinatória:* Dados um conjunto de n homens e n mulheres conte de duas maneiras diferentes todas as comissões de n pessoas com um homem escolhido para ser o líder dos homens.

(b) *Demonstração utilizando o binômio de Newton:* Considere

$$(1+x)^n(1+y)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j\right)$$

derive em relação a x, substitua $y = x$ e finalmente identifique o coeficiente de x^{n-1} dos dois lados da igualdade.

5. (*Grupo E*) O objetivo desta questão é dar três demonstrações diferentes para o fato de que sempre que $n \geq r$ e $m \geq r$, vale a seguinte identidade (Convolução de Vandermonde) .

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots\cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

(a) *Demonstração combinatória:* Sejam A e B dois conjuntos disjuntos com $\mid A \mid = n$ e $\mid B \mid = m$. Considere a coleção

$$\mathcal{F} = \{ C \subseteq A \cup B \mid \ \mid C \mid = r \ \}$$

Conte os elementos de $\mathcal{F}$ dividindo em casos, de acordo com quantos elementos eles têm em comum com A.

(b) *Demonstração utilizando o Binômio de Newton:* Considere

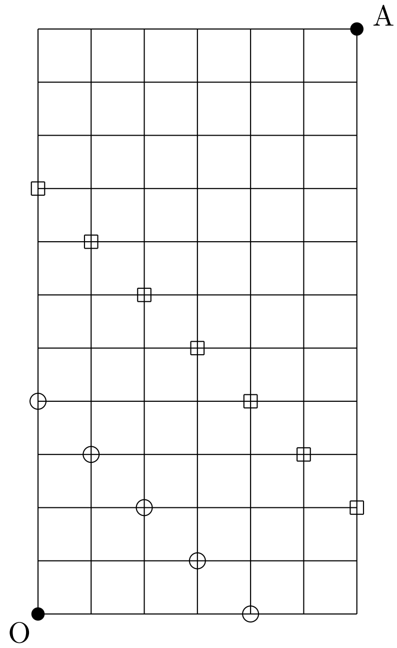
$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n \, (1+x)^m,$$

expanda os 3 binômios, e compare o coeficiente de x^r nos dois lados da igualdade.

(c) O objetivo deste item é mostrar uma maneira diferente de provar a mesma identidade acima: *usando um diagrama de ruas e quadras.* Para simplificar, só se pede que você faça um caso particular.

No diagrama de quadras e ruas abaixo, considere todos os caminhos (de mínima distância) de O para A (na figura, caminhos indo sempre para cima a para a direita) e conte-os dividindo em casos, de acordo com o ponto onde cruzam a diagonal com os pontos marcados com quadrados, correspondendo às esquinas cuja distância de O é 8 quadras. Considerando todos os casos possíveis, obtenha um caso particular da identidade da questão anterior.

(d) Novamente, dividindo todos os caminhos (de mínima distância) de O para A em casos, de acordo com o ponto em que cruzam a diagonal de pontos circulados, obtenha uma igualdade similar à obtida na parte (a).



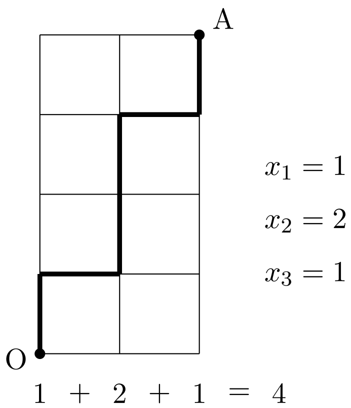
6. (*Grupo F*) Para $k, n \geq 1$ fixados, considere a pergunta: de quantas maneiras pode-se expressar

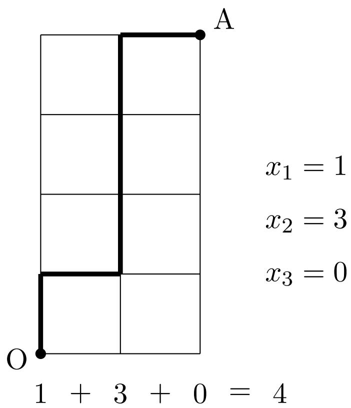
$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n,$$

onde os x_i são inteiros não negativos?

Por exemplo, de quantas maneiras pode-se escrever $x_1 + x_2 + x_3 = 4$? Algumas possibilidades são: 1+3+0=4, 0+1+3=4, 1+2+1=4, etc.

Além do método visto em aula, é possível usar um diagrama de ruas e quadras para resolver este problema. Cada maneira de escrever $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ pode ser visualizada como uma trajetória, cada x_i representando número de passos para cima. Por exemplo,





(a) Conte desta maneira o número de diferentes soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

onde cada x_i é inteiro com $x_i \geq 0$?

(b) Quantas diferentes combinações de moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos pode um cofrinho conter, sabendo que ao todo ele contém 20 moedas?